

Физика и математика

Объединяя невозможное

Sergio Killuminati

Две науки об одном мире, рассказанные как одна история: каждый раз, когда казалось, что дальше нельзя, стена оказывалась дверью. Кроме одного раза.

оказалось одним и тем же

небо земля		механика
тепло движение атомов		температура
электричество свет		поле
волна частица		квант
пространство время		интервал

оказалось возможным

измерить диагональ		$\sqrt{2}$
меньше, чем ничего		-5
корень из минус единицы		i
сосчитать бесконечное		$\aleph_0$
предсказать случай		вероятность

На основе книг авторов: Ричард Фейнман • Айзек Азимов • Уолтер Левин • Яков Перельман • Карл Кун • Стивен Хокинг • Лоуренс Краусс • Рихард Курант и Герберт Роббинс • Мартин Гарднер • Стивен Строгац • Алекс Беллос • Джордан Элленберг • Леонард Млодинов • Дуглас Хофштадтер • Алексей Савватеев • Иван Савов. **С учётом первоисточников:** Евклид • Архимед • Галилей • Декарт • Ньютон • Эйлер • Лобачевский • Максвелл • Кантор • Гильберт • Гёдель • Эйнштейн

Предисловие

Летом 1666 года в Англии свирепствовала чума, Кембридж закрыли, и двадцатитрёхлетний выпускник по имени Исаак Ньютон уехал пережить эпидемию в материнское поместье. Там, по его собственному позднему рассказу, он проделал вычисление, которое стоило целой эпохи.

Луна примерно в шестьдесят раз дальше от центра Земли, чем яблоня в саду. Если сила тяжести слабеет как квадрат расстояния, то на лунной орбите она в три с половиной тысячи раз слабее здешней, и Луна за каждую секунду должна отклоняться от прямой линии всего на полтора миллиметра. Ньютон сравнил это число с настоящей орбитой Луны. Сошлось — по его словам, «довольно близко».

Две тысячи лет до этого небо и земля считались разными мирами: там — вечное, совершенное, движущееся по кругам; здесь — тленное, грубое, падающее вниз. После этого расчёта выяснилось, что мир один, а формула, которая им управляет, помещается в полстроки.

За двадцать с лишним веков до Ньютона, около 500 года до нашей эры, человек из школы Пифагора взял квадрат со стороной в один локоть и захотел узнать, чему равна диагональ. Задача выглядела рутинной: измерить поточнее, взять единицу помельче — пядь, палец, ноготь, — и рано или поздно диагональ уложится в целое число этих единиц. Так работало всё измеримое на свете.

Он не нашёл такой единицы. И — это куда важнее — доказал, что её не существует. Не «мы пока не нашли», не «нужны приборы поточнее», а: никакая дробь, ни одна из бесконечного их множества, не равна этой диагонали. Отрезок, который можно начертить палкой на песке, оказалось нечем измерить.

Это две разные истории только на первый взгляд. На самом деле это одна и та же история, рассказанная с двух сторон.

Физика раз за разом обнаруживала, что две вещи, считавшиеся разными по природе, — одна и та же вещь. Небо и земля. Тепло и движение атомов. Электричество, магнетизм и свет. Волна и частица. Пространство и время. Каждый раз мир после этого становился проще, чем был до.

Математика раз за разом упиралась в слово «невозможно» — и каждый раз оказывалось, что невозможного не существует, просто мир чисел больше, чем думали. Числа меньше нуля триста лет называли ложными. Корень из минус единицы назвали мнимым — в насмешку, и название за ним осталось. Величину, которая одновременно исчезает и не исчезает, епископ Беркли высмеял как призрак умершей величины — и был совершенно прав, а математики пользовались ею ещё полтора века. Бесконечность считали одной — пока не выяснилось, что их много и они разного размера.

Объединение и невозможность — это одно движение: стена оказывается дверью. Отсюда и название книги.

Есть и вторая причина рассказывать это вместе, куда более практическая. Математика — не служебный аппарат физики и не её украшение; в половине случаев её придумали ровно затем, чтобы описать что-то физическое, и разделять их — значит дважды объяснять одно и то же. Ньютон изобрёл производную не для учебника алгебры, а чтобы записать падение. Фурье разложил функцию на синусы, разбираясь с распространением тепла. Комплексные числа, триста лет бывшие математическим

курьёзом, оказались естественным языком переменного тока и квантовой амплитуды. Риманова геометрия, которую придумывали как чистое упражнение воображения, через полвека понадобилась Эйнштейну. Поэтому в этой книге математический аппарат появляется там, где он понадобился, — и ни одной главой раньше.

Восемь частей идут в том порядке, в каком удобнее всего учиться: число и измерение; движение вместе с началами анализа, потому что это одна история; буква, симметрия и теорема Нётер, из которой видно, что симметрия и закон сохранения — одно и то же; всё, что колеблется, — от тригонометрии до света; случай, у которого есть закон, — от вероятности до энтропии; поле, вектор и квант; пространство, время и Вселенная. И последняя часть — про границы: то, что осталось невозможным навсегда.

Ни один раздел двух предметов не оставлен за бортом. Книга не заменит задачник, но обещает другое: после неё в этих науках не останется мест, про которые вы не знаете даже, что они существуют.

Книга написана для взрослого, который решил разобраться сам — может быть, во второй раз в жизни. Она не требует ничего, кроме школьной арифметики и готовности иногда посчитать на бумаге; всё, что сложнее, помечено словом «факультативно».

У обоих предметов есть авторы, которые объясняют их лучше, чем кто бы то ни было, и у каждого здесь своя работа. Фейнман доводит до интуиции — до состояния, когда закон кажется единственно возможным. Азимов помнит, кто и на какой ошибке до этого закона дошёл. Левин предпочитает измерить, и такое лучше один раз увидеть: его лекции стоят в книге ссылкой и QR-кодом. Перельман ловит на здравом смысле: его задачи устроены так, что интуиция даёт уверенный и неправильный ответ. Кун не даёт читать пассивно — большинство расчётных задач его. Курант и Роббинс держат каркас математики целиком. Гарднер даёт головоломки: в каждой главе стоит одна его, вместе с его же разбором. Строгац умеет объяснить одну идею за раз и остановиться вовремя, Элленберг и Беллос показывают, где математика ловит вас в жизни, Хофштадтер ведёт по теореме Гёделя, Хокинг и Краусс показывают горизонт. А к ключевым поворотам книга ходит к первоисточнику: у Галилея, Евклида и Кантора видно, как человек думал, а не только то, к чему пришёл. Чужой голос всегда вынесен в рамку и подписан, всё проверяемое снабжено ссылкой внизу той же страницы, а в конце книги лежит список того, что стоит прочесть целиком.

Одно правило чтения. Ответы к задачам никогда не стоят рядом с вопросом — они всегда на следующей странице. Это против того, что глаз читает быстрее, чем голова думает: увидев ответ, вы почти наверняка решите, что сами пришли бы к нему. Не переворачивайте страницу, пока не сформулировали ответ вслух или на бумаге. Даже неправильный ответ, произнесённый до подглядывания, учит больше, чем правильный, прочитанный сразу.

Задачи здесь не проверка, а инструмент: не сошёлся ответ — значит, в этом месте объяснение вас не убедило, вернитесь на страницу назад.

И последнее, о чём честно сказать в начале. Эта книга написана вместе с искусственным интеллектом: он читал со мной источники, спорил, считал, проверял выкладки и верстал эти страницы. Отвечаю за результат я — а значит, ошибки тоже мои. Лучшее, что может случиться с книгой, которую пишут на глазах у читателя, — чтобы их поймали раньше, чем они затвердеют. Для этого есть открытый чат: [@gfazzzchat](https://t.me/gfazzzchat) в телеграме; QR-код — на последней странице.

Оглавление

Предисловие	3
-------------------	---

Пролог. Два способа быть уверенным

0. Опыт и доказательство	7
--------------------------	---

Часть I. Сколько и насколько

1. Счёт: откуда взялись числа	24
2. Доли, части и проценты	—
3. Простые числа и остатки	—
4. Теорема, которую знают все	—
5. Отрезок, который нечем измерить	—
6. Единица, размерность, порядок	—

Часть II. Движение и величина, которая исчезает

7. Движение, которое можно записать	—
8. Скорость как касательная	—
9. Три закона и одна ошибка Аристотеля	—
10. Площадь как сумма исчезающих полосок	—
11. Что сохраняется	—
12. Яблоко и Луна	—
13. Жидкости и газы: та же механика	—
14. Призраки умерших величин	—

Часть III. Буква, симметрия и то, чего не может быть

15. Минус, буква и уравнение	—
16. Степень, корень, логарифм	—
17. Кубические уравнения и корень из минус единицы	—
18. Уравнение пятой степени: почему формулы нет	—
19. Симметрия, у которой есть арифметика	—
20. Что нельзя построить циркулем и линейкой	—

Часть IV. Всё, что колеблется, — одно

21. Треугольник, ставший волной	—
22. Колебание, маятник, резонанс	—
23. Уравнение, в котором неизвестна функция	—
24. Волна: звук и всё остальное	—
25. Когда волны встречаются	—
26. Бесконечная сумма, у которой есть ответ	—

- 27. Свет как луч —
- 28. Цвет, спектр и состав звёзд —

Часть V. Случай, у которого есть закон

- 29. Незаконченная игра —
- 30. Закон больших чисел и колокол —
- 31. Как из выборки узнать про всех —
- 32. Почему мы верим в атомы —
- 33. Что показывает градусник —
- 34. Машины и направление времени —
- 35. Беспорядок, который можно посчитать —

Часть VI. Поле, вектор и квант

- 36. Заряд, поле и ток —
- 37. Магнетизм — это тоже электричество —
- 38. Максвелл: свет оказался волной поля —
- 39. Вектор, матрица, преобразование —
- 40. Волна или частица —
- 41. Атом изнутри —
- 42. Ядро —
- 43. Из атомов — вещество —

Часть VII. Пространство и время — одно целое

- 44. Скорость света и конец здравого смысла —
- 45. Масса и энергия — одно —
- 46. Пятый постулат и другие геометрии —
- 47. Тяготение возвращается —
- 48. Звёзды и Вселенная целиком —
- 49. Из чего всё сделано —

Часть VIII. Границы познаваемого

- 50. Форма, связь и мера —
- 51. Бесконечности разного размера —
- 52. Мечта Гильберта и теорема Гёделя —
- 53. Машина, которая не может ответить —
- 54. Уравнение есть, а предсказать нельзя —
- 55. Игра, в которой нет хорошего исхода —
- 56. Что ещё не объединено —

Что читать дальше 40

Опыт и доказательство

Представьте себе спор, в котором обе стороны уверены. Не спор о вкусах, где спорить не о чем, а спор о том, как устроен мир: падают ли тяжёлые тела быстрее лёгких, конечен ли список простых чисел, помогает ли лекарство. Уверенность есть у обоих. Как выяснить, кто прав?

У человечества есть на это ровно два надёжных ответа, и они устроены совершенно по-разному.

Первый ответ — физический: поставить опыт. Взять два тела, уронить, посмотреть. Никакие рассуждения, никакая репутация, никакая стройность теории не имеют веса против измерения. Это правило появилось поздно, оно стоило нескольких веков усилий, и оно работает.

Второй ответ — математический: доказать. Не «проверить тысячу раз, и всегда сходилось», а показать, что *иначе быть не может*. Ни одного опыта при этом не ставится. Ни один объект не измеряется. И тем не менее вывод получается более прочным, чем любой экспериментальный: доказанная теорема не устаревает.

Эта книга — про две науки, которые проверяют себя этими двумя способами, и про то, что описывают они при этом один и тот же мир. Начать стоит с самих способов: что каждый из них умеет, чего не умеет и где каждый ломается. Дальше всё остальное будет опираться на эту главу.

0.1 Единственный судья

Начинается всё, впрочем, не с проверки, а с вопроса. Никакой метод не работает, пока некому спросить: а почему, собственно, так? Айзек Азимов считал это первым и главным свойством человека — и заметил, что оно, в отличие от прочих наших свойств, никакой очевидной пользы не приносит и тем не менее не исчезает.

Айзек Азимов

Путеводитель по науке

Из всех живых существ только человек проявляет любопытство к вещам, которые не имеют отношения к его выживанию.

Дальше начинается работа. Две с лишним тысячи лет физика была разделом философии, и решали в ней рассуждением. Аристотель писал, что тяжёлое тело падает быстрее лёгкого, и это выглядело настолько очевидно, что проверять никто не собирался: камень падает быстрее пера, посмотрите сами. Утверждение продержалось девятнадцать веков.

Сломал его не эксперимент, а мысленный эксперимент — и это отдельно поучительно. Галилей рассуждал так. Пусть тяжёлое падает быстрее лёгкого. Свяжем тяжёлый камень с лёгким верёвкой и бросим. С одной стороны, лёгкий должен тормозить тяжёлый, и связка упадёт медленнее, чем тяжёлый камень отдельно. С другой стороны, связка тяжелее любого из камней, значит, должна упасть быстрее. Одно и то же утверждение даёт два взаимоисключающих вывода — значит, оно неверно. Никакой башни для этого не нужно.¹

¹ Галилей Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки (1638) // Галилей Г. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1964.



Рис. 0.1. Мысленный опыт Галилея. Если тяжёлое падает быстрее лёгкого, то связка двух камней обязана падать и медленнее тяжёлого, и быстрее его. Противоречие получено без единого броска.

Ронял ли Галилей что-нибудь с Пизанской башни

Скорее всего, нет. Единственный источник этой истории — жизнеописание, составленное Винченцо Вивиани, учеником Галилея, через много лет после его смерти; сам Галилей о таком опыте нигде не пишет, а он был не из тех, кто скромничал. Зато у него подробно описан наклонный жёлоб — прибор куда более скучный на вид и куда более пригодный для измерения: шар на нём катится медленно, и время можно засечь.

Иронии тут двойная порция. Самая известная легенда о торжестве опыта над авторитетом — сама держится на авторитете единственного пересказчика. Проверьте её тем же способом, которому учит эта глава: спросите, откуда мы это знаем.

Источник. Cooper L. Aristotle, Galileo, and the Tower of Pisa. Ithaca: Cornell University Press, 1935.

Но чтобы узнать, как тела падают на самом деле, рассуждения уже не хватило. Понадобился наклонный жёлоб, водяные часы и несколько лет измерений — об этом будет глава седьмая. Мысленный эксперимент умеет ловить противоречие. Настоящий — отвечать на вопрос.

Ричард Фейнман

Характер физического закона

Если теория расходится с экспериментом, она неверна. И неважно, насколько она красива, насколько вы умны и как вас зовут.

В этой формулировке важно каждое отрицание. Не важна красота теории — а красота чрезвычайно убедительна, и физики раз за разом на неё покупались. Не важен авторитет — а Аристотель девятнадцать веков был авторитетом. Не важно, сколько людей согласны, — согласны были все.

Уолтер Левин, читавший вводный курс физики в MIT сорок лет, довёл этот принцип до демонстрации. Он подвешивал к потолку лекционного зала тяжёлый шар на длинной проволоке, отводил его в сторону, прижимал к собственному подбородку и отпускал — не толкая. Шар уходил в дальний конец аудитории, возвращался и останавливался в сантиметре от лица. Закон сохранения энергии обещает, что маятник не поднимется выше точки, откуда его отпустили. Левин ставил на это обещание свои зубы — и объяснял студентам, что вера в физику проверяется именно так.²

² Левин У., Гольдштейн У. Глазами физика: от края радуги к границе времени. М.: АСТ, 2017.

Проверьте себя

На столе два одинаковых с виду куриных яйца: одно сырое, другое сваренное вкрутую. Разбивать нельзя, взвешивать нечем, просвечивать нечем. Как за пять секунд определить, какое из них сырое?

0.2 Опыт, который тоже может ошибаться

Раз опыт — судья, стоит сразу сказать, чего он не может.

Первое: измерение никогда не даёт числа. Оно даёт число с погрешностью. «Длина стола 1,5 м» — это не результат измерения, это результат измерения, из которого выбросили половину информации. Результат — « $1,502 \pm 0,002$ м». Без второй части первая ничего не значит: непонятно, отличается ли она от 1,504 или нет, а весь вопрос обычно именно в этом. Левин начинал свой первый курс с этой мысли и повторял её потом весь семестр: измерение без указания погрешности бессмысленно.³

Второе: у всякой величины есть размерность, и она обязана сходиться. Слева и справа от знака равенства должны стоять одинаковые единицы — метры с метрами, секунды с секундами. Это звучит как занудство, но это самая дешёвая проверка из существующих: она ловит опечатку в формуле за пять секунд и не требует ни знания предмета, ни калькулятора.

Проверьте себя

Вам сообщают, что период колебаний маятника длиной l равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}},$$

где g — ускорение свободного падения, около $9,8 \text{ м/с}^2$.

Не заглядывая ни в какой справочник и не ставя опыта, покажите, что формула неверна.

125 миллионов долларов на фунтах и ньютонах

23 сентября 1999 года станция Mars Climate Orbiter, летевшая к Марсу девять с половиной месяцев, вошла в атмосферу планеты на 170 километров ниже расчётной высоты и разрушилась. Причина: программа, считавшая импульс двигателей коррекции, выдавала результат в фунт-силах на секунду, а принимающая сторона читала его как ньютоны на секунду. Множитель 4,45 копился от коррекции к коррекции девять месяцев.

Ни одной ошибки в физике. Ни одной ошибки в арифметике. Одна несогласованная единица — и станции нет.

Источник. Mars Climate Orbiter Mishap Investigation Board. Phase I Report. Washington: NASA, 10 November 1999.

Третье, и самое неприятное: опыт можно поставить неправильно, и понять это по самому опыту нельзя. Плохо откалиброванный прибор даёт стабильные, воспроизводимые, красиво ложащиеся на кривую и совершенно неверные результаты. Отсюда правило, которое отличает науку от её имитации: измерение должно быть воспроизведено другими людьми, на другой установке, желательно теми, кто заинтересован получить противоположный ответ. К этому месту мы вернёмся в конце главы, когда речь пойдёт о том, как опыт обманывает.

³ Lewin W. 8.01 Classical Mechanics: видеокурс. MIT OpenCourseWare, 1999. Официальный канал: youtube.com/@lecturesbywalterlewin.they9259

Ответы

Раскрутите оба на столе, как волчок. Варёное разгоняется легко и крутится долго; сырое идёт вяло и быстро встаёт.

Ещё нагляднее второй приём: раскрутите яйцо и на мгновение прижмите пальцем, тут же отпустив. Варёное остановится насовсем — оно твёрдое, вы остановили его целиком. Сырое, постояв долю секунды, снова поедет: скорлупу вы задержали, а жидкое содержимое внутри продолжало вращаться и потянуло скорлупу за собой.

Приём из «Занимательной физики» Перельмана. Обратите внимание, что вы сейчас сделали: получили сведения о внутреннем устройстве закрытого объекта, ни разу его не вскрыв. Ровно этим занимается физика — от определения строения Земли по сейсмическим волнам до определения строения атома по рассеянию частиц.

Источник. Перельман Я. И. Занимательная физика. Кн. 1–2. М.: АСТ, 2019.

Ответы

Проверьте размерность. У g она м/с^2 , у l — м , значит, g/l измеряется в $1/\text{с}^2$, а корень из этого — в $1/\text{с}$. Получилась величина, обратная времени, то есть частота. Период так измеряться не может.

Правильная формула — $T = 2\pi\sqrt{l/g}$: под корнем м делится на м/с^2 , остаётся с^2 , корень даёт секунды. Сходится.

Заметьте, что размерность не подтвердила формулу, а только не опровергла: множитель 2π она поймать не может, его размерность — единица. Проверка размерностью работает в одну сторону, зато мгновенно. Возьмите её в привычку: каждый раз, получив формулу, сначала посмотрите на единицы, а уже потом на числа.



Посмотреть. Курс 8.01 Уолтера Левина в MIT — классика жанра; на его официальном канале выложены полные плейлисты.

К этой главе — лекция первая: единицы, размерности, оценка порядков и погрешность. Там же он измеряет собственный рост лёжа и стоя и обнаруживает разницу в сантиметр.

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLyQSN7X0ro203puVhQsmCj9qhlFQ-As8e>

0.3 Порядок величины

Между «не знаю» и «знаю точно» есть промежуточное состояние, которым физики пользуются постоянно, а все остальные почему-то нет: знать ответ с точностью до множителя в несколько раз. Это называется оценкой по порядку величины, и это самый недооценённый инструмент в этой книге.

Классический пример придумал Энрико Ферми, спрашивавший студентов: сколько настройщиков фортепиано в Чикаго? Справочника нет, гуглить нечего, угадать невозможно. Зато можно рассуждать. В Чикаго примерно три миллиона жителей, это примерно миллион семей; фортепиано есть, скажем, у одной семьи из двадцати — пятьдесят тысяч инструментов. Настраивают их примерно раз в год. Настройщик успевает обслужить инструментов пять в день, работает двести дней в году — тысяча настроек в год на человека. Значит, настройщиков около пятидесяти. Реальное число — несколько десятков.⁴

Обратите внимание, что произошло. Каждое отдельное предположение могло быть неверным вдвое в любую сторону. Но ошибки в произведении не складываются, а частично гасят друг друга, и результат оказывается верным по порядку. Из ничего, за минуту, без единого

4 von Baeyer H. C. The Fermi Solution: Essays on Science. New York: Random House, 1993. (Оценки по порядку величины.)

справочника получено число, с которым уже можно работать: если бы вышло пять настроек или пять тысяч, это означало бы, что в рассуждении что-то устроено принципиально иначе, чем вы думали, — и вот это уже повод разбираться.

Такая прикидка — первое, что стоит делать с любым числом, которое вам называют. Она не заменяет расчёт. Она отвечает на более важный вопрос: правдоподобен ли ответ вообще.

Привычка эта окупается далеко за пределами физики. Вам сообщают, что где-то сгорело «миллион гектаров леса»; гектар — это сто на сто метров, миллион гектаров — десять тысяч квадратных километров, квадрат сто на сто километров. Много это или мало? Смотря с чем сравнить: площадь Московской области — сорок семь тысяч квадратных километров. Значит, речь про пятую часть области — цифра большая, но представляемая. Или: заголовок обещает батарею, которая «заряжается за минуту». Автомобильная батарея хранит примерно 60 киловатт-часов; чтобы влить их за минуту, нужна мощность 3600 киловатт — это как три тысячи электрочайников, включённых в один провод. Значит, речь либо не про полный заряд, либо про инфраструктуру, которой нет. Всё это — арифметика на полях, тридцать секунд, и она отсеивает больше ерунды, чем любая эрудиция.

Заметьте ещё одно: правильно оценённый порядок величины сам подсказывает, какая физика тут главная. Если оценка расходится с реальностью в тысячу раз, значит, в задаче работает что-то, чего вы не учли, — и это «что-то» обычно и есть самое интересное.

Проверьте себя

Юлий Цезарь умер в 44 году до нашей эры. Перед смертью он, как всякий человек, сделал последний выдох — примерно пол-литра воздуха.

С тех пор эти молекулы разошлись по всей атмосфере Земли. Оцените, сколько молекул из последнего выдоха Цезаря вы вдыхаете прямо сейчас, делая обычный вдох.

Что понадобится: масса атмосферы около $5 \cdot 10^{18}$ кг, средняя молярная масса воздуха 29 г/моль, в моле $6 \cdot 10^{23}$ молекул, объём вдоха около 0,5 л, моль газа при обычных условиях занимает 22,4 л.

0.4 Палка, тень и размер Земли

Прежде чем переходить ко второму способу быть уверенным, стоит посмотреть на случай, где оба работают вместе, — потому что ради таких случаев эта книга и написана в одну, а не в две.

Около 240 года до нашей эры Эратосфен, заведовавший Александрийской библиотекой, знал любопытный факт про город Сиену на юге Египта: в полдень дня летнего солнцестояния солнце там стоит точно в зените. Отвесный шест не отбрасывает тени вовсе, а дно глубокого колодца освещается целиком.

В Александрии в тот же самый момент тень есть. Эратосфен её измерил: шест отклонялся от направления на солнце примерно на одну пятидесятую полного круга — около семи градусов.

Дальше — чистая геометрия. Солнце далеко, его лучи приходят практически параллельным пучком; значит, разница в наклоне теней — это не свойство солнца, а свойство Земли: угол между двумя точками её поверхности, если смотреть из центра. Раз этот угол равен одной пятидесятой полного оборота, то и расстояние между городами составляет одну пятидесятую окружности Земли. Расстояние это было известно — примерно пять тысяч стадиев, их отмеряли шагами специально обученные люди. Умножаем на пятьдесят: двести пятьдесят тысяч стадиев.⁵

⁵ Клеомед. О круговом движении небесных тел. Кн. I, гл. 10. (Единственное подробное изложение измерения Земли Эратосфеном.)

Ответы

Около двух молекул.

Считаем в два хода. Молекул в атмосфере: $5 \cdot 10^{18}$ кг разделить на $0,029$ кг/моль — это $1,7 \cdot 10^{20}$ молей, то есть примерно 10^{44} молекул. Молекул в одном выдохе: $0,5/22,4 = 0,022$ моля, то есть $1,3 \cdot 10^{22}$ молекул.

Значит, доля молекул Цезаря в атмосфере — $1,3 \cdot 10^{22}/10^{44} \approx 10^{-22}$. В вашем вдохе столько же молекул, сколько было в его выдохе, — умножаем: $1,3 \cdot 10^{22} \times 10^{-22} \approx 1,3$. Пара молекул.

Ответ держится на предположении, что за две тысячи лет воздух перемешался равномерно, — для тропосферы это вполне разумно. И он поразителен сам по себе: две тысячи лет спустя вы физически связаны с человеком через две молекулы в лёгких. Но поразительнее другое — что такую вещь вообще можно сосчитать на салфетке, зная четыре числа.

Источник. von Baeyer H. C. The Fermi Solution (указ. соч.).

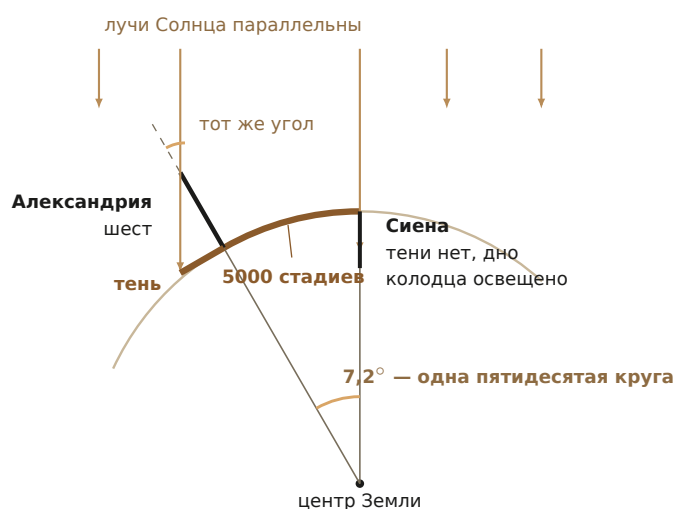


Рис. 0.2. Как Эратосфен измерил Землю. Угол между шестом и лучом в Александрии равен углу между двумя городами, если смотреть из центра планеты, — потому что лучи Солнца приходят параллельным пучком. Одна пятидесятая круга на земле означает одну пятидесятую всей окружности. Угол на рисунке увеличен втрое: настоящие $7,2^\circ$ дали бы тень, которую на такой картинке не разглядеть.

Насколько точно он попал, сказать честно нельзя — и это отдельно поучительно. Стадий в разных местах равнялся то 157, то 185 метрам, и какой имел в виду Эратосфен, неизвестно. При первом получается около 39 400 километров, при втором — 46 000. Настоящая окружность Земли — 40 075 километров. То есть в лучшем случае ошибка меньше двух процентов, в худшем — пятнадцать; репутация «точности в один процент», которая ходит за этой историей, держится на выборе стадия, а выбор нам неизвестен.⁶

Но существенно здесь не число. Существенно, что человек с палкой, тенью и знанием подобных треугольников измерил планету, ни разу не выйдя за пределы своей провинции. Измерение само по себе дало бы длину тени — бесполезное число. Геометрия сама по себе не дала бы ничего: она умеет связывать величины, но не знает, чему они равны. Вместе они дали размер Земли.

6 Engels D. The length of Eratosthenes' stade // American Journal of Philology. 1985. Vol. 106, № 3.

Проверьте себя

В рассуждении Эратосфена есть условие, без которого оно не работает: Сиена и Александрия должны лежать на одном меридиане, то есть строго на север и юг друг от друга. Почему? Что сломается, если города окажутся, скажем, на одной широте — строго на восток и запад?

0.5 Узор, который сломался

Теперь другая половина книги. Переходим от того, как проверяют физику, к тому, как проверяют математику, — и начнём с задачи, которую можно решать карандашом на салфетке.

Нарисуйте окружность и поставьте на ней несколько точек. Соедините каждую точку с каждой прямой линией. Линии разрежут круг на части. Сосчитайте части.

Одна точка — круг цел, одна часть. Две точки — одна хорда, две части. Три точки — треугольник, четыре части. Четыре точки — восемь частей. Пять точек — шестнадцать.

Узор виден невооружённым глазом: 1, 2, 4, 8, 16. Каждый раз вдвое больше. Значит, для шести точек будет 32.

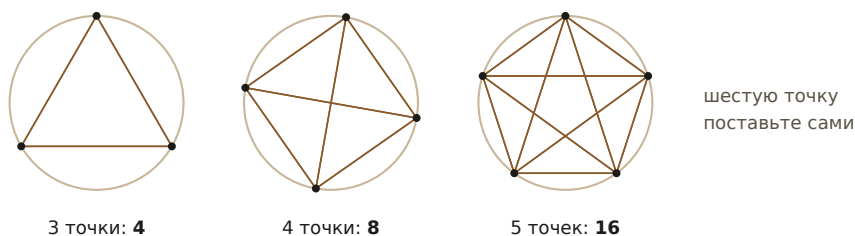


Рис. 0.3. Точки на окружности соединены всеми хордами; считаем части, на которые разрезан круг. Три круга нарисованы, четвёртый — за вами.

Проверьте себя

Нарисуйте шесть точек на окружности (расположите их несимметрично, иначе три хорды пересекутся в одной точке и вы потеряете кусочек) и честно сосчитайте части.

Отсюда правило, которое отличает математику от всего остального человеческого опыта: сколько бы примеров ни сошлось, они ничего не доказывают. Пять сошлись, пятьдесят сошлись, пять миллиардов сошлись — следующий может не сойтись, и никакая статистика об этом не предупредит.

Здесь стоит остановиться и заметить, насколько это правило странное. В физике ровно наоборот: если измерение воспроизвели пять тысяч раз в двадцати лабораториях, вопрос считается закрытым, и это разумно. В обычной жизни тоже: если лекарство помогло тысяче человек, вы будете его принимать, не дожидаясь доказательства. Математика — единственная область, где количество подтверждений не конвертируется в уверенность вообще никак.

Проверено до четырёх миллиардов миллиардов — и всё ещё не доказано

В 1742 году Христиан Гольдбах написал Эйлеру письмо с предположением: любое чётное число, большее двух, есть сумма двух простых. $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $100 = 3 + 97$. С тех пор гипотезу проверили компьютером для всех чётных чисел примерно до $4 \cdot 10^{18}$ — это четыре миллиарда миллиардов проверок, все до одной успешные. Для любой другой науки такой результат означал бы полную и окончательную победу. В математике

Ответы

Сломается связь между углом и расстоянием. Тень измеряет угол в направлении север—юг: солнце в полдень стоит выше или ниже в зависимости от широты. Если два города лежат на одной широте, солнце в местный полдень поднимается в них на одну и ту же высоту, тени одинаковы, разность углов — ноль. А расстояние между городами при этом любое. Из нуля градусов и пятисот километров окружность Земли не вычислить.

Строго говоря, Сиена и Александрия лежат на одном меридиане лишь приблизительно — расхождение около трёх градусов долготы, — и это одна из причин, по которым точность результата не стоит преувеличивать.

Обратите внимание на общую форму рассуждения: мы не считали, а искали, какое условие делает вывод возможным. Такой вопрос — «что здесь на самом деле работает?» — обычно полезнее, чем сам ответ.

Ответы

Частей получается **31**. Не 32.

Пять совпадений подряд — и на шестом шаге всё разваливается. Дальше становится только хуже: 57, 99, 163. Никакого удвоения нет и не было; формула, которая на самом деле описывает эту последовательность, содержит четвёртую степень числа точек и просто случайно совпадает с двойками на первых пяти шагах.

Запомните это чувство. Пять подтверждений подряд — и вывод неверен.

Источник. Conway J. H., Guy R. K. The Book of Numbers. New York: Springer, 1996. (Задача о делении круга хордами.)

он не значит ровно ничего: гипотеза Гольдбаха до сих пор не доказана, и никто не знает, верна ли она.

Источник. Oliveira e Silva T., Herzog S., Pardi S. Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$ // Mathematics of Computation. 2014. Vol. 83, № 288. P. 2033–2060.

0.6 Что такое доказательство

Раз примеры не годятся, нужно что-то другое. Вот как это выглядит.

Простое число — это число, которое делится только на себя и на единицу: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17... Чем дальше по числовому ряду, тем реже они попадают. Между 1 и 100 простых двадцать пять, между 1000 и 1100 — шестнадцать, между миллионом и миллионом сто — шесть. Естественный вопрос: не кончатся ли они вовсе? Может, есть самое большое простое число, после которого их нет?

Ответ дал Евклид примерно за триста лет до нашей эры, и доказательство его умещается в абзац.

Предположим противное: простых чисел конечное число. Тогда их можно все выписать в список: $p_1, p_2, \dots, p_k$ — и последнее в списке будет самым большим простым. Перемножим их все и прибавим единицу:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1.$$

Это число N на любое из наших простых делится с остатком 1 — ведь произведение делилось нацело, а мы добавили лишнюю единицу. Значит, ни одно простое из списка не является делителем N .

Но у всякого числа, большего единицы, есть хотя бы один простой делитель. Значит, у N есть простой делитель — и его нет в нашем списке.

Список, в который мы выписали все простые числа, оказался неполным. Противоречие. Значит, исходное предположение ложно, и простых чисел бесконечно много.

Источник. Евклид. Начала. Книги VII–X. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. (Бесконечность множества простых чисел — предположение 20 книги IX.)

Посмотрите, что здесь произошло. Мы не проверили ни одного числа. Мы не нашли ни одного нового простого. Мы вообще не считали. И тем не менее теперь мы знаем про все числа — включая те, которые никто никогда не запишет, — нечто окончательное. Этому доказательству двадцать три века, и за это время в нём не нашли ни одной трещины.

Сравните с самым надёжным физическим результатом, какой сможете вспомнить. Механика Ньютона три столетия была вершиной точного знания и подтверждалась каждым расчётом орбиты — а потом выяснилось, что на больших скоростях она неверна. Ни одна физическая теория не защищена от такой судьбы в принципе. Теорема Евклида защищена.

И ещё одно, что легко упустить. Хорошее доказательство не только удостоверяет, что утверждение верно, — оно объясняет, почему. Из рассуждения Евклида видно, за счёт чего простые не могут кончиться: сколько бы их ни было выписано, из самого списка изготавливается число, которое ни на одно из них не делится. Это понимание остаётся с вами и работает потом в других задачах, а «проверено до четырёх миллиардов миллиардов» не даёт ничего, кроме уверенности. Разница примерно как между «этот мост стоит — я по нему ходил» и «этот мост стоит — вот расчёт нагрузок».

Ход «предположим противное и получим противоречие» называется доказательством от противного. Это самый мощный инструмент в математике, и мы будем пользоваться им всю книгу.

Проверьте себя

Проверим доказательство Евклида на маленьком списке. Возьмём первые шесть простых чисел и сделаем ровно то, что он велит:

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031.$$

- Простое ли число 30031? (Подсказка: попробуйте поделить его на 59.)
- Если оно окажется составным — значит ли это, что Евклид ошибся?

0.7 Опровергнуть проще, чем доказать

У асимметрии между примерами и доказательством есть обратная сторона, и она приятная. Чтобы опровергнуть утверждение обо всех числах, достаточно одного-единственного числа, на котором оно ломается. Не тысячи. Одного.

Пьер Ферма, лучший в XVII веке специалист по числам, заметил, что числа вида $2^{2^n} + 1$ получаются простыми: 3, 5, 17, 257, 65537. Пять раз подряд — и он высказал осторожное предположение, что так будет всегда.

Ответы

а) Не простое: $30031 = 59 \times 509$.

б) Нет, и в этом вся тонкость. Евклид не утверждал, что N обязано быть простым, — он утверждал, что у N есть простой делитель, которого нет в списке. Так и вышло: 59 и 509 — простые, и обоих в нашем списке из шести чисел не было. Доказательство сработало ровно так, как обещало.

Многие пересказывают этот аргумент неправильно — «перемножим все простые, прибавим единицу, и получится новое простое», — и на числе 30031 такой пересказ разваливается. Это хороший повод запомнить: в доказательстве важно каждое слово, и «имеет простой делитель вне списка» — совсем не то же самое, что «является простым».

Через девяносто лет Леонард Эйлер взял следующее число из этого ряда, $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$, и разделил его на 641. Разделилось нацело. Гипотезы Ферма не стало — одним делением, без всякой теории.⁷

Почему именно 641

Эйлер не перебирал делители подряд — перебор до 641 занял бы у человека с пером недели. Он сначала доказал, что делитель такого числа, если он есть, обязан иметь совершенно определённый вид: $64k + 1$. Это оставило для проверки лишь 193, 257, 449, 577, 641... — десяток кандидатов вместо сотни. Пятый подошёл.

Это стоит запомнить как образец: прежде чем что-то искать перебором, посмотрите, нельзя ли сначала доказать, где искать не нужно.

Ровно та же асимметрия работает в физике, и именно она делает её наукой. Никакой эксперимент не может доказать теорию: сколько бы предсказаний ни сбылось, следующее может не сбыться. Зато один-единственный надёжный эксперимент может теорию убить. Карл Поппер сделал из этого наблюдения критерий: научным следует считать утверждение, для которого можно указать, какой именно результат опыта его опровергнет. Если такого результата нет — если утверждение согласуется с любым исходом, — то оно, может быть, и верно, но наукой не является.⁸

Это звучит сурово, но именно так физика и живёт. Общая теория относительности предсказала, что луч звезды, проходящий у края Солнца, отклонится на 1,75 угловой секунды — ровно вдвое сильнее, чем следовало из теории Ньютона. Значение проверяли во время полного затмения 1919 года; результат объявили подтверждением, и Эйнштейн наутро стал знаменит. Честности ради надо сказать, что точность тех фотопластинок была на грани: спор о том, насколько данные 1919 года действительно различали две теории, идёт до сих пор.⁹ По хорошему вопрос закрыли только через полвека — радиоинтерферометрией, а потом измерениями аппарата «Кассини», где то же отклонение подтвердилось с точностью до тысячных долей процента.¹⁰

Так что и здесь у физики нет момента окончательной победы. Есть только всё более узкие рамки, в которые теория обязана попадать, — и каждое новое измерение либо оставляет её в живых, либо нет.

7 Euler L. Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1738. Vol. 6.

8 Поппер К. Логика научного исследования. М.: Республика, 2004.

9 Dyson F. W., Eddington A. S., Davidson C. A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1920. Vol. 220. P. 291–333. • Earman J., Glymour C. Relativity and eclipses: the British eclipse expeditions of 1919 and their predecessors // Historical Studies in the Physical Sciences. 1980. Vol. 11, № 1.

10 Bertotti B., Iess L., Tortora P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft // Nature. 2003. Vol. 425. P. 374–376.

А если проверить нечем

Критерий Поппера ставит неудобный вопрос, который в современной физике стоит в полный рост: что делать с теорией, для которой опыт не то чтобы не поставлен, а не может быть поставлен при нынешней технике?

Самый известный случай — теория струн. Она предлагает считать элементарные частицы не точками, а колебаниями крошечных протяжённых объектов, и обещает в перспективе то, чего физика хочет уже сто лет: одно описание для тяготения и квантовой механики сразу. Математически это очень содержательная конструкция; из неё выросли результаты, которые ценят и те, кто в неё не верит. Но характерный масштаб, на котором различия должны проявиться, лежит на много порядков дальше того, что достижимо на ускорителях, — и проверяемого предсказания, которое отличало бы теорию струн от соперниц, за десятилетия не появилось.

Дальше мнения расходятся, и обе стороны заслуживают того, чтобы их изложили честно. Критики — среди них Ли Смолин и Питер Войт¹¹ — говорят: раз опровергнуть нельзя, попперовского статуса у теории нет, а огромные силы уходят в направление, которое может оказаться тупиком. Сторонники отвечают: «непроверяемо сегодня» и «непроверяемо в принципе» — разные вещи; атомы полвека считались удобной фикцией, а нейтрино предсказали за четверть века до регистрации; теория, дающая связную математику там, где иначе получается бессмыслица, заслуживает продолжения, даже если решающий опыт не виден.¹²

Кто прав, здесь не решается. Важно другое: спор идёт не о формулах, а именно о критерии — о том, что считать наукой. Стоит запомнить эту развилку, потому что в последней части книги мы придём к похожему вопросу с другой стороны: там окажется, что и в математике есть утверждения, для которых нет процедуры проверки. Причём в математике это доказано.

0.8 Доказать, что чего-то не бывает

Особенно ценно доказательство там, где оно утверждает невозможность. Тут перебор бессилен в принципе: не найдя решения за неделю, вы не узнаете, нет его или вы плохо искали.

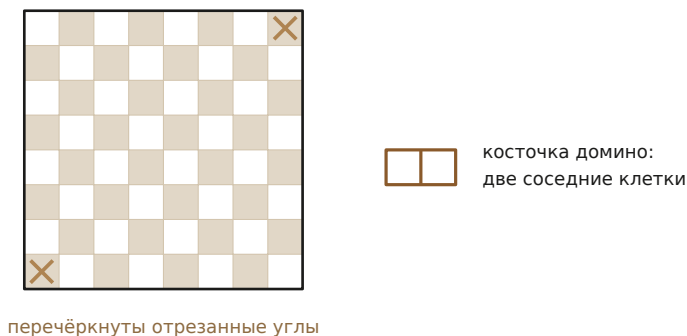


Рис. 0.4. Доска без двух противоположных углов: 62 клетки, 31 косточка. Места хватает ровно.

Проверьте себя

У шахматной доски 8×8 отрезали две противоположные угловые клетки — осталось 62 клетки. Есть 31 косточка домино, каждая накрывает ровно две соседние клетки (по горизонтали или по вертикали). Клеток 62, косточек 31, места хватает точно. Замостите этими косточками обрезающую доску — или докажете, что это невозможно.

Слово «инвариант» стоит запомнить прямо сейчас, потому что это тот самый мост, ради которого написана эта книга. Инвариант — это величина, которая не меняется, что бы вы ни

11 Smolin L. The Trouble with Physics. Boston: Houghton Mifflin, 2006. • Woit P. Not Even Wrong: The Failure of String Theory. London: Jonathan Cape, 2006.

12 Dawid R. String Theory and the Scientific Method. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

Ответы

Невозможно, и доказывается это в одну строчку — если посмотреть на цвет.

Каждая косточка домино, как её ни клади, накрывает две соседние клетки, а соседние клетки на шахматной доске всегда разного цвета. Значит, любая укладка накрывает поровну белых и чёрных.

Но противоположные углы доски — одного цвета. Отрезав их, мы оставили 30 клеток одного цвета и 32 другого. Поровну не выйдет никогда.

Обратите внимание, чего здесь нет: перебора. Мы не пробовали укладывать домино вообще ни разу. Мы нашли величину — разность числа белых и чёрных клеток, — которая при любой укладке обязана быть нулём, и показали, что на этой доске она равна двум. Такие величины называются инвариантами.

Источник. Гарднер М. Математические досуги. М.: Мир, 1972.

делали. В математике инвариант доказывает невозможность: раз он обязан быть нулём, а он двойка, — задача решения не имеет. В физике инварианты называются законами сохранения — и работают точно так же.

Возьмите энергию. Она сохраняется: сколько было в замкнутой системе, столько и осталось, как её ни перекачивай из формы в форму. Отсюда мгновенно следует невозможность вечного двигателя — машины, которая работает вечно, не потребляя ничего. Не «пока не придумали», не «нужны материалы получше», а невозможно ровно в том же смысле, в каком невозможно замостить обрезанную доску.

Патент, который не станут читать

Французская академия наук с 1775 года перестала рассматривать проекты вечного двигателя, и вслед за ней это правило приняли патентные ведомства по всему миру. Заявку отклоняют, не вникая в схему.

С виду это высокомерие: как можно отвергать изобретение, не разобравшись? На деле это экономия. Ошибка в схеме есть обязательно, потому что заключение о невозможности получено не из перебора схем, а из инварианта. Искать её — работа изобретателя, а не эксперта.

Источник. Орд-Хьюм А. Вечное движение. История одной навязчивой идеи. — Ord-Hume A. W. J. G. Perpetual Motion: The History of an Obsession. London, 1977.

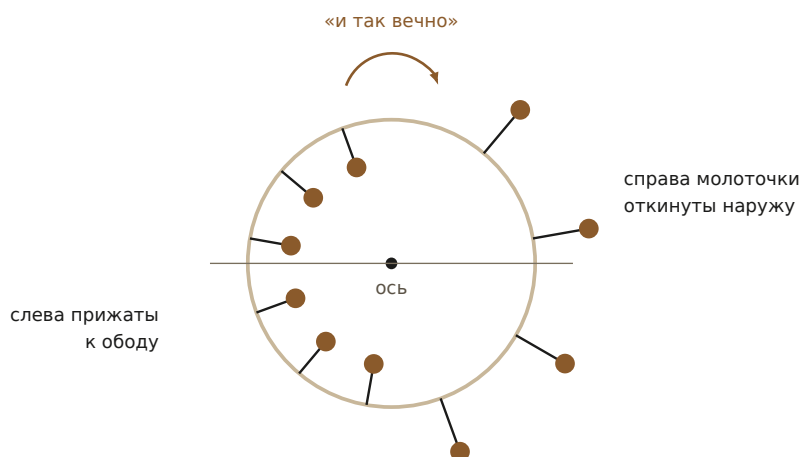


Рис. 0.5. Колесо из альбома французского архитектора Виллара де Оннекура, XIII век. Схема воспроизводилась шесть столетий, и ни один построенный экземпляр не заработал.

Проверьте себя

Колесо на горизонтальной оси; по ободу шарнирно закреплены тяжёлые молоточки. С правой стороны молоточки откидываются наружу, с левой — прижимаются к оси. Значит, справа они действуют на большем плече, момент справа больше, колесо крутится вправо. И так вечно.

Ошибка здесь есть. Найдите её, не рассуждая про энергию.

Источник. Орд-Хьюм А. Вечное движение (указ. соч.).

0.9 Где ломается доказательство

Доказательство — цепь, и она не крепче слабейшего звена. Раз уж мы собираемся ему верить, полезно один раз увидеть, как оно подделывается.

Проверьте себя

Ниже «доказано», что $2 = 1$. Найдите ошибку.

Пусть $a = b$. Умножим обе части на a : $a^2 = ab$.

Вычтем из обеих частей b^2 : $a^2 - b^2 = ab - b^2$.

Разложим на множители: $(a + b)(a - b) = b(a - b)$.

Сократим на $(a - b)$: $a + b = b$.

Но $a = b$, значит $2b = b$, откуда $2 = 1$.

У выкладки хотя бы есть то достоинство, что её можно пересчитать построчно и поймать подозрительный шаг. Гораздо опаснее, когда «доказывает» рисунок: глаз проверяет мгновенно, соглашается сразу и не умеет объяснить, почему согласился.

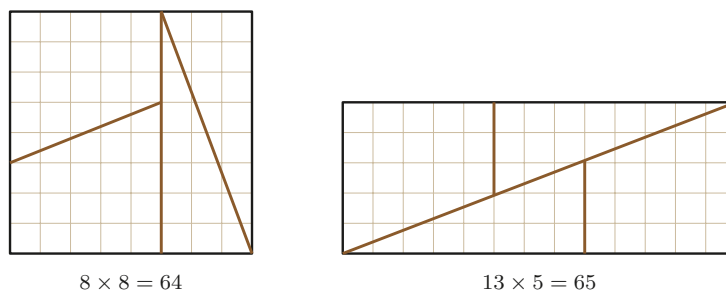


Рис. 0.6. Квадрат 8×8 и прямоугольник 13×5 , сложенный из тех же четырёх частей. Ни одна не потерялась и ни одна не добавилась.

Проверьте себя

Квадрат 8×8 разрезали на четыре части — два треугольника и две трапеции — и сложили из них прямоугольник 13×5 . Части те же самые, ни одна не потерялась и ни одна не добавилась. Было 64 клетки, стало 65.

Откуда взялась лишняя клетка?

0.10 Где ломается опыт

С экспериментом дело обстоит ровно так же, только подделка получается убедительнее — потому что подделывает её обычно не мошенник, а честный человек.

Ответы

Момент справа действительно больше — у *каждого* отдельного молоточка. Но молоточков справа при этом *меньше*.

Откиннутые грузы разъезжаются по дуге широко, прижатые к оси собираются кучно, — и на правой половине их оказывается ровно во столько раз меньше, во сколько больше плечо. Полные моменты сравниваются точно. Колесо поворачивается на несколько градусов, приходит в положение равновесия и останавливается — что и происходило со всеми построенными экземплярами.

Обратите внимание на устройство ошибки. Изобретатель посчитал одну величину (плечо) и забыл посчитать вторую (число грузов), потому что первая была видна на чертеже, а вторая нет. Так устроено большинство вечных двигателей: не наглый обман, а честный подсчёт половины эффекта.

И сравните два пути к одному ответу. Через закон сохранения — две строчки и никаких чертежей, но вы не узнаете, где именно ошибка. Через прямой разбор — дольше, зато видно механику. В книге дальше будет много таких пар, и почти всегда полезно пройти обоими путями.

Ответы

Ошибка в сокращении на $(a - b)$. Мы с самого начала положили $a = b$ — значит, $a - b$ равно нулю, и мы разделили обе части на ноль.

Делить на ноль нельзя не потому, что кто-то запретил, а потому, что деление — это обратное действие к умножению: «разделить на c » значит «найти число, которое при умножении на c даёт исходное». При $c = 0$ такого числа либо нет вовсе, либо годится любое. Стоит один раз позволить это действие — и доказать можно всё что угодно, включая $2 = 1$.

Полезная привычка: увидев в выкладке сокращение, спрашивайте себя, не может ли сокращаемое оказаться нулём. Ровно так выглядят почти все математические фокусы.

Ответы

Ниоткуда: её нет. Части не примыкают друг к другу вплотную — вдоль длинной диагонали прямоугольника остаётся щель, очень узкий и очень длинный параллелограмм. Его площадь ровно единица, и именно её мы принимаем за лишнюю клетку.

Щель не видно, потому что у треугольника наклон $3/8 = 0,375$, у трапеции $2/5 = 0,400$, а у настоящей диагонали прямоугольника $5/13 \approx 0,3846$. Три разных наклона, различающиеся в третьем знаке, — глаз их не различает, а карандаш прячет разницу в толщине линии.

Числа тут не случайные: 2, 3, 5, 8, 13 — подряд идущие числа Фибоначчи, а у них есть свойство $5 \cdot 13 - 8^2 = 1$. Поэтому фокус получается с любой такой тройкой, и лишняя клетка то появляется, то пропадает, смотря по тому, расходятся части или перекрываются.

Парадокс подробно разобран у Мартина Гарднера, который заодно показал, что он — не случайный фокус, а следствие свойства чисел Фибоначчи, и потому воспроизводится бесконечной серией.

Мораль та же, что и с делением на ноль, только злее. Там ошибку можно было найти, пересчитав строчки. Здесь читать нечего: рисунок предьявляет себя целиком и сразу, и единственная защита — посчитать наклоны, то есть не поверить глазам.

Источник. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. 2-е изд., испр. и доп. М.: Мир, 1999.

В 1903 году французский физик Проспер Блондло, специалист с прекрасной репутацией, сообщил об открытии нового вида излучения — N-лучей, названных в честь его родного города Нанси. Лучи проходили сквозь металл, задерживались водой и слегка усиливали свечение экрана; наблюдать это усиление приходилось глазом, в тёмной комнате, после получаса

привыкания. За год вышло около трёхсот работ по N-лучам. Их наблюдали десятки исследователей во Франции.

В 1904 году к Блондло приехал американский физик Роберт Вуд. Во время демонстрации, в темноте, он незаметно вынул из установки алюминиевую призму — деталь, без которой лучей быть не могло. Блондло продолжал уверенно описывать наблюдаемую картину. На этом история N-лучей закончилась.¹³

Никакого обмана здесь не было. Был человек, который знал, что должен увидеть, и глаз, который на пределе различимости всегда готов пойти навстречу ожиданию. Именно поэтому в современной науке измерения стараются делать так, чтобы наблюдатель не знал, какой результат «правильный», — отсюда слепые и двойные слепые опыты.

Историю принято считать курьёзом из наивных времён, но она повторяется. 23 марта 1989 года двое уважаемых электрохимиков, Мартин Флейшман и Стэнли Понс, объявили — на пресс-конференции, до всякой публикации, — что получили ядерный синтез в стеклянной банке на лабораторном столе: палладиевый электрод, тяжёлая вода, комнатная температура и избыточное тепло, которого не объяснить химией. Новость обошла мир за сутки. Через несколько месяцев выяснилось, что избыточное тепло не воспроизводится, а нейтронов, которые при заявленном синтезе обязаны были бы литься потоком, нет.¹⁴

Разбирать тут стоит не мотивы, а устройство ошибки. Измерялось не «есть синтез или нет», а разность двух больших чисел — вложенной и выделившейся энергии. Такое измерение исключительно чувствительно к систематике: небольшая неучтённая мелочь в калориметрии даёт ровно тот эффект, который ищут. А порядок действий — сначала пресс-конференция, потом проверка — лишил авторов единственной защиты, которая у экспериментатора есть: чужих рук, повторяющих опыт до того, как ты успел публично поставить на него имя.

Наука самолётопоклонников

В 1974 году Ричард Фейнман назвал это «наукой самолётопоклонников» — по имени культов на островах Тихого океана, где после войны строили из соломы взлётные полосы и вышки, надеясь, что самолёты с грузом вернутся. Форма соблюдена полностью, а самолёты не садятся.

Главное качество учёного, по Фейнману, — особая честность, состоящая в том, чтобы изо всех сил искать, чем ты сам можешь оказаться неправ, и сообщать об этом первым.

Источник. Фейнман Р. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! М.: АСТ, 2016. (Глава «Наука самолётопоклонников» — речь в Калтехе, 1974.)

Проверьте себя

В рекламе лекарства сказано: «В нашем исследовании 90 % пациентов, принимавших препарат, полностью выздоровели в течение недели».

Утверждение — чистая правда, исследование проведено добросовестно, числа не подделаны. Какой единственный вопрос нужно задать, чтобы понять, стоит ли этот результат чего-нибудь?

0.11 Чего не даёт ни то, ни другое

Осталось сказать, чего у обеих наук нет, — иначе картина выйдет слишком победной.

¹³ Wood R. W. The n-Rays // Nature. 1904. Vol. 70. P. 530–531. • Klotz I. M. The N-ray affair // Scientific American. 1980. Vol. 242, № 5.

¹⁴ Fleischmann M., Pons S. Electrochemically induced nuclear fusion of deuterium // Journal of Electroanalytical Chemistry. 1989. Vol. 261, № 2. • Huizenga J. R. Cold Fusion: The Scientific Fiasco of the Century. Rochester: University of Rochester Press, 1992.

Ответы

«А сколько выздоровело среди тех, кто препарат не принимал?»

Без контрольной группы число 90 % не значит ничего. Если простуда сама проходит за неделю у 90 % людей, то лекарство не сделало ровно ничего — и все приведённые данные при этом абсолютно верны.

Это самая распространённая ошибка в обращении с данными, и она не про арифметику, а про логику: утверждение «после приёма выздоровели» подменяет утверждение «выздоровели благодаря приёму». Отделить одно от другого может только сравнение с тем, что было бы без вмешательства.

Заметьте, что эта задача — и физическая, и математическая сразу. Физическая: она про то, как правильно поставить опыт. Математическая: она про то, что из посылки не следует вывод. В книге таких задач будет много — собственно, ради них она и написана в одну, а не в две.

У математики доказательство ведёт от посылок к выводу и ничего не говорит о самих посылках. Если в основание положены аксиомы — утверждения, принятые без доказательства, — то и вся постройка верна лишь настолько, насколько верны они. А проверить аксиомы изнутри математики нельзя: это уже вопрос не доказательства, а выбора.

Рихард Курант и Герберт Роббинс*Что такое математика?*

Действительно существенными и имеющими непосредственное касательство к «проверяемым» фактам являются структура и взаимосвязи между этими объектами.

Иными словами, математика не отвечает на вопрос, что такое число «на самом деле». Она отвечает на вопрос, как числа себя ведут.

У физики положение обратное и по-своему более печальное. Её утверждения проверяются опытом — но именно поэтому ни одно из них не окончательно. Всякая физическая теория имеет область применимости, и границу этой области обнаруживают, как правило, тогда, когда за неё уже вышли. Механика Ньютона не была отменена теорией относительности; выяснилось, что она — приближение, отличное при малых скоростях и негодное при больших. Такова же, вероятно, судьба всего, что написано в этой книге дальше главы сороковой.

Ричард Фейнман*Ценность науки*

То, что мы называем научным знанием, есть совокупность утверждений разной степени достоверности: некоторые совсем ненадёжны, другие почти достоверны, но абсолютно достоверных нет ни одного.

Зато у двух способов есть свойство, которого нет у каждого по отдельности: они страхуют друг друга, и почти всегда в разные стороны. Ошибку в выкладке ловит размерность — то есть физика ловит математику. Ошибочную физическую интуицию ловит доказательство: вам кажется, что тяжёлое должно падать быстрее, а связанные камни Галилея показывают, что это предположение само себе противоречит, — математика ловит физику. Дальше в книге такие пары будут встречаться постоянно, и стоит взять за правило проверять новое утверждение обоими способами: посчитать порядок величины и посмотреть, не следует ли из него чего-нибудь заведомо ложного.

И остаётся вопрос, на который нет ответа ни у той науки, ни у другой: почему математика вообще работает в физике. Ей это не обязано. Числа придумывали, считая овец; комплексные числа — решая кубические уравнения на спор; риманову геометрию — из чистого любопытства, что будет, если отменить пятый постулат Евклида. Ни в одном из этих случаев никто не думал о природе. А потом раз за разом оказывалось, что готовая математическая конструкция в точности описывает физическое явление, о котором её автор понятия не имел.

Физик Юджин Вигнер написал об этом статью с говорящим названием — «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»¹⁵ — и честно закончил тем, что объяснения у этого нет. Формулировка Вигнера стоит того, чтобы её запомнить: это дар, которого мы не понимаем и не заслужили. Вся дальнейшая книга — в некотором смысле подробный рассказ о том, как этот дар работает, без единой попытки объяснить, откуда он взялся.

0.12 Как устроена эта книга

Осталось объяснить условные знаки.

Врезки — чужие голоса. Всё, что стоит в рамке с именем автора и названием книги, написано не мной. Остальной текст — мой, и отвечаю за него я.

Сноски внизу страницы — подтверждения. Они стоят там, где утверждение можно и стоит проверить: дата, число, обстоятельство. Читать их не обязательно — текст на них нигде не опирается, — но если что-то показалось неправдоподобным, вы сразу видите, откуда это взято. Во врезках, где сноска мешала бы, источник указан строкой внизу самой врезки. Мне это правило дисциплинирует руку: за каждой такой ссылкой стоит место, где я обязан был свериться, а не вспомнить.

Список «Что читать дальше» в конце — совсем другое: не подтверждения, а книги, которые стоит прочесть целиком, с пояснением, зачем каждая.

Блоки «Проверьте себя» — задачи; ответ к ним всегда наверху следующей страницы, и не раньше. Зачем так сделано, сказано в предисловии. Задачи в каждой главе двух сортов: одна что-нибудь считает или измеряет, другая требует доказать или ловит на интуиции. Это не украшение, а рабочее правило книги: у каждой стороны своя проверка на прочность.

Рамки с QR-кодом ведут на видео — в основном на лекции Уолтера Левина и ролики канала 3Blue1Brown. Некоторые вещи проще один раз увидеть в движении, чем прочесть про них страницу.

Разделы с пометкой «факультативно» содержат выкладки, которые можно пропустить без потери нити.



Посмотреть. Канал 3Blue1Brown Гранта Сандерсона — лучшая математическая анимация из существующих.

К этой главе ближе всего его разбор задачи о делении круга: там видно, откуда берётся четвёртая степень и почему первые пять членов — чистое совпадение.

<https://www.youtube.com/@3blue1brown>

А теперь — первая часть. Она начинается с самого обычного дела: люди захотели что-то посчитать. И почти сразу выяснилось, что посчитать и измерить — разные вещи.

¹⁵ Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // УФН. 1968. Т. 94, вып. 3. С. 535–546. — Wigner E. P. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13, № 1. P. 1–14.

Счёт: откуда взялись числа

В 1937 году на раскопках в моравском селении Дольни-Вестонице нашли обломок волчьей кости с зарубками. Зарубок пятьдесят пять, они сгруппированы по пять, а после двадцать пятой сделана заметно длиннее остальных. Кости около тридцати тысяч лет.¹

Мы не знаем, что считал её владелец: дни, добычу, людей, фазы луны. Зато точно знаем кое-что другое: он не умел считать. Слов для чисел у него, скорее всего, не было. Он делал единственное, что было доступно, — клал зарубку за каждую вещь. И всё же длинная черта после двадцати пяти означает, что он уже нащупал главный приём: считать проще не по одному, а группами.

С этой кости и начнём. Числа — вещь настолько привычная, что кажутся частью природы, вроде камней и воды. На самом деле их пришлось изобретать, и это заняло у человечества несколько десятков тысяч лет.

А ближе к концу главы выяснится вторая половина той же истории: числа, которыми считают, и числа, которыми измеряют, — не одно и то же, и разница между ними важнее, чем кажется.

1.1 «Столько же» без чисел

Представьте пастуха, который не знает ни одного числительного. Утром он выгоняет стадо, вечером загоняет обратно. Как ему узнать, все ли овцы вернулись?

Способ есть, и он работает, не требуя вообще никакого счёта. Утром на каждую выходящую овцу пастух кладёт в мешок камешек. Вечером на каждую входящую вынимает по камешку. Мешок опустел — всё в порядке. Остался камешек — одной овцы нет.

Обратите внимание: пастух так и не узнал, сколько у него овец. И ему это не понадобилось. Он сравнил две совокупности, ни разу их не сосчитав, — поставив каждой овце в соответствие ровно один камешек.

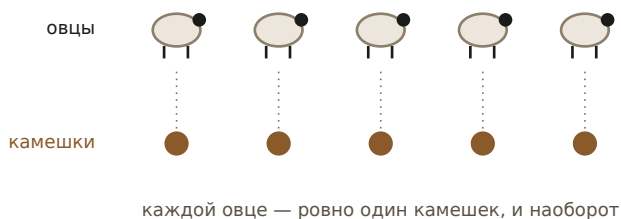


Рис. 1.1. Взаимно-однозначное соответствие. Пастух не знает, сколько у него овец, и не собирается узнавать: ему довольно того, что мешок опустел. Тем же приёмом в главе 51 будут сравнивать бесконечности.

Приём называется взаимно-однозначным соответствием, и это самая глубокая идея во всей этой главе. Из неё выросло понятие числа: «шесть» — это то общее, что есть у всех совокупностей, между которыми можно установить такое соответствие. Шесть рыбок, шесть камешков, шесть пингвинов — одно и то же шесть.

Стивен Строгац

Удовольствие от х

¹ Ifrah G. Histoire universelle des chiffres. Paris: Robert Laffont, 1994. (Русского издания нет; есть английский перевод: The Universal History of Numbers. New York: Wiley, 2000.)

Число шесть более эфемерно, чем «шесть рыбок», — именно потому, что оно универсально. Шесть может быть чего угодно: шесть тарелок, шесть пингвинов, шесть раз произнесённое слово «рыбка».

Стоит отдельно оценить, насколько это неочевидный шаг. Чтобы додуматься до числа «шесть», нужно заметить, что у шести рыбок и шести дней нет ровно ничего общего, кроме одного свойства, — и что именно это свойство стоит выделить, назвать и изучать отдельно от рыбок и дней. Первая в истории абстракция такого рода. Всё остальное в этой книге — включая поля, кванты и бесконечности разного размера — сделано тем же приёмом: выделить общее, забыть про остальное.

И ещё: запомните пастуха с камешками. Ближе к концу книги мы применим ровно этот приём к бесконечным множествам — и получим самый удивительный результат из всех. Оказывается, сравнивать «сколько» можно и там, где сосчитать нельзя в принципе.

Проверьте себя

Пастух, не умеющий считать, хочет узнать не «все ли овцы на месте», а другое: чего у него больше — овец или коз. Как ему это выяснить, по-прежнему не считая?

Камешек, который стал вычислением

Латинское *calculus* означает «камешек». Римляне считали, перекладывая камешки по желобкам счётной доски, — и от этих камешков произошли слова «калькулятор» и «калькуляция». Врачебное «камень в почке» — то же самое слово, доставшееся медицине по прямому значению. Так что, включая калькулятор, вы буквально говорите «камешкосчёт».

Источник. Menninger K. Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers. Cambridge (Mass.): MIT Press, 1969. (Английский перевод немецкого оригинала «Zahlwort und Ziffer».)

1.2 Один, два, много

Слова для чисел появляются не сразу и не все.

В языке пираха, на котором говорит небольшой народ в бассейне Амазонки, точных числительных, по описаниям работавших с ним лингвистов, нет вовсе. Есть слова со значением примерно «мало», «побольше» и «много» — и даже то, которое переводят как «один», в разных ситуациях означает то одну вещь, то две. Когда исследователи предлагали носителям языка выложить столько же орехов, сколько им показали, до трёх штук справлялись все, а дальше точность быстро падала — при том что никаких проблем с интеллектом у людей нет. Просто в их жизни не возникает задач, где нужно отличить восемь от девяти.²

Следы этой ступени остались и в наших языках. Русские «один» и «два» склоняются иначе, чем остальные числительные, и требуют особой формы существительного: «два дома», но «пять домов». Английское *pair, brace, couple*; двойственное число, бывшее отдельной грамматической формой в древних языках, — всё это память о временах, когда двойка ещё не была «просто одним из чисел».

Способность различать небольшие количества, судя по всему, старше человека. Вороны и голуби надёжно отличают два от трёх и три от четырёх; пчёлы, которых учили лететь к четвёртому ориентиру, находят его и в новом ряду; львицы по числу услышанных голосов

2 Everett D.L. Cultural constraints on grammar and cognition in Pirahã // Current Anthropology. 2005. Vol. 46, № 4. P. 621–646. • Gordon P. Numerical cognition without words: evidence from Amazonia // Science. 2004. Vol. 306. P. 496–499.

Ответы

Выгонять их парами: одна овца — одна коза, одна овца — одна коза. Кто кончится первым, того и меньше. Если кончились одновременно — поровну.

Ни одного числа опять не понадобилось. Заметьте, что здесь мы уже сравниваем не с мешком камешков, а две настоящие совокупности между собой, — и получаем не только «равно или нет», но и «чего больше». Это ровно тот инструмент, которым Кантор в главе 35 будет сравнивать бесконечности: там окажется, что чётных чисел «столько же», сколько всех целых, потому что их можно выстроить такими парами.

решают, вступать ли в драку с чужим прайдом. Шимпанзе Аюму, которого в Киотском университете учили работать с цифрами на экране, запоминает расположение девяти чисел за доли секунды — быстрее и точнее большинства людей.³

Ни одно из этих животных не считает в нашем смысле: они не строят ряд, не прибавляют единицу, не знают, что после девяти идёт десять. Они оценивают количество — примерно так же, как мы на глаз оцениваем, кого больше в двух корзинах. Разница между этой оценкой и настоящим счётом — та же, что между «на глаз тут метра полтора» и линейкой.

Любопытно, что и у нас самих счёт устроен двухступенчато. До четырёх предметов человек определяет количество мгновенно, не считая, — это называется субитизацией и работает даже у младенцев и у птиц. Начиная с пяти включается совсем другой механизм: приходится пересчитывать по одному. Граница между «вижу, что их три» и «считаю: раз, два, три, четыре, пять» — это, по-видимому, та же самая граница, что и в языке пираха.⁴

1.3 Почему десять

Дальше нужно как-то называть большие количества, и тут человечество независимо в разных местах пришло к одному решению: считать группами.

Размер группы — основание системы — выбран не из математических соображений, а по анатомическим. Десять — потому что пальцев десять. Двадцать — потому что вместе с пальцами ног. Двадцатеричный счёт до сих пор торчит из французского языка: восемьдесят по-французски — *quatre-vingts*, «четыре двадцатки». В датском ещё причудливее.

Двенадцать — потому что на четырёх пальцах руки двенадцать фаланг, и их удобно считать большим пальцем той же руки; отсюда дюжина, дюжина дюжин (гросс) и двенадцать месяцев. А шестьдесят — потому что это пять раз по двенадцать: одна рука отсчитывает фаланги, другая — пятёрки. Шестидесятеричный счёт вавилонян мы носим на запястье до сих пор: шестьдесят секунд в минуте, шестьдесят минут в часе, триста шестьдесят градусов в окружности.⁵

Здесь стоит сказать вслух вещь, которая пригодится через несколько разделов. Основание системы — чистый произвол. Оно ничего не говорит о числах, оно говорит о руках. Число двенадцать не становится другим оттого, что вы записали его как «12», «С» или «1100». Ровно то же самое произойдёт с единицами измерения: метр не свойство пространства, а свойство договорённости. Различать, где кончается природа и начинается наш выбор обозначений, — один из главных навыков, которым учит эта книга.

Почему в круге именно 360 градусов

Потому что вавилонянам было удобно. Число 360 делится на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120 и 180 — двадцать четыре делителя. Круг можно

3 Dehaene S. The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics. Rev. ed. Oxford: Oxford University Press, 2011. • McComb K., Packer C., Pusey A. Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions // *Animal Behaviour*. 1994. Vol. 47. • Inoue S., Matsuzawa T. Working memory of numerals in chimpanzees // *Current Biology*. 2007. Vol. 17, № 23. P. R1004–R1005.

4 Dehaene S. The Number Sense (указ. соч.).

5 Ifrah G. Histoire universelle des chiffres (указ. соч.). • Menninger K. Number Words and Number Symbols (указ. соч.).

нарезать на равные части почти как угодно, ни разу не встретив дроби. У числа 100 делителей всего девять. Мы пользуемся вавилонским выбором четыре тысячи лет подряд, причём одновременно с десятичной системой, — и никого это не смущает.

Источник. Нейгебауэр О. Точные науки в древности / пер. с англ. Е. В. Гохман. М.: Наука, 1968. — Neugebauer O. The Exact Sciences in Antiquity. 2nd ed. Providence, 1957.

Проверьте себя

Запишите число 2026 так, как записал бы его вавилонянин, — в шестидесятеричной системе. То есть найдите, сколько в нём целых шестидесятков и сколько остаётся сверх них.

1.4 Позиция и ноль

Иметь названия для чисел — полдела. Гораздо важнее, как их записывать.

Римская запись устроена по принципу «сложи то, что видишь»: XLVII — это «без десяти пятьдесят, да пять, да два». Читать можно, складывать с трудом, умножать почти невозможно.

Проверьте себя

Не переводя в привычные цифры, умножьте XLVII на XIX. Дайте себе на это пять минут — не ради ответа, а ради ощущения.

Выход — позиционная запись: значение цифры зависит от того, на каком месте она стоит. В числе 333 три одинаковых знака означают три сотни, три десятка и три единицы. Такая запись сразу даёт правила действий столбиком, которые в школе кажутся скучной механикой, — а на самом деле это одно из великих изобретений человечества.

	тысячи	сотни	десятки	единицы
как пишем мы	3	3	3	3
как писали римляне	MMM	CCC	XXX	III
одно и то же число — 3333				

Рис. 1.2. Слева направо — разряды; в обеих строках записано одно и то же число. У нас знак во всех разрядах один и тот же, а значит он то, что значит его место: отсюда столбик, перенос и сколько угодно разрядов. У римлян вес вшит в сам знак, и разряды кончаются вместе с буквами: М — это тысяча, а миллион записать уже нечем.

Но у позиционной записи есть цена: нужен знак для пустого разряда. Без него 33 и 303 неразличимы. Этот знак — ноль.

Сначала он был просто заполнителем: вавилоняне ставили в пустом разряде особую пометку. Числом ноль стал в Индии. В 628 году Брахмагупта впервые описал его как полноценное число⁶ и сформулировал правила действий с ним: что получится, если к нулю прибавить, из нуля вычесть, на ноль умножить. Про деление на ноль он тоже написал — и ошибся; на разбор этого места ушло ещё тысячу лет, и мы к нему уже возвращались в прологе, разбирая доказательство того, что $2 = 1$.

6 Брахмагупта. Брахмаспхутасиддханта. 628. • Ifrah G. Histoire universelle des chiffres (указ. соч.).

Ответы

$2026 = 33 \times 60 + 46$, то есть тридцать три шестидесятки и сорок шесть. Вавилонянин записал бы это двумя группами клинышков: «33, 46».

Сверьте себя тем же приёмом на привычном материале: 2026 секунд — это 33 минуты 46 секунд. Вы только что перевели число в шестидесятеричную систему, и делаете это всякий раз, когда смотрите на часы.

Ответы

Ответ: DCCCXCIII, то есть 893.

Но ценность задачи не в ответе, а в ощущении беспомощности. В римской записи нет разрядов, а значит, нет и правил столбиком: цифра не имеет собственного веса, её значение зависит от соседей (I перед X — это минус один, I после X — плюс один). Умножать приходилось не на бумаге, а на счётной доске, перекладывая камешки, — и записывать только результат.

Именно поэтому счёт в Европе был профессией. Человек, умеющий умножать, стоил денег — и, между прочим, ещё в XVI веке родителям советовали отдавать сына в итальянский университет, если требуется, чтобы он овладел делением.

Источник. Ifrah G. Histoire universelle des chiffres (указ. соч.).

Как эти цифры попали к нам

Знаки, которыми мы пишем числа, называются индо-арабскими — и название точно описывает маршрут. Придумали их в Индии, через арабских математиков они попали в мусульманскую Испанию и Северную Африку, а в Европу их привёз купеческий сын из Пизы.

Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи, вырос в Алжире, где отец вёл торговые дела, и научился считать у арабских счетоводов. В 1202 году он выпустил «Книгу абака»,⁷ в которой объяснял европейцам новую запись — с нулём, разрядами и правилами столбиком — и честно показывал, насколько она удобнее для торговых расчётов. (Между делом там же стоит задача про размножение кроликов, из которой выросла последовательность его имени; мы к ней вернёмся, когда дойдём до рядов.)

Приняли новинку не сразу и без восторга. В 1299 году цех менял во Флоренции постановил, что суммы в книгах следует писать не сокращённо, а словами, полностью. Смысл был бухгалтерский: сокращённую запись легко подправить — ноль дорисовывается до шестёрки или девятки, единица до семёрки, — а прописью не смощенничаешь.

Эту историю стоит рассказать ещё и потому, что с ней случилось нечто поучительное. За XX век локальное цеховое правило разрослось в пересказах до «Флоренция запретила арабские цифры», а затем и до «церковь запрещала бесовские знаки» — утверждения, которого сами документы не содержат вовсе. Разбору этого превращения посвящена отдельная работа.⁸ Мы в прологе обещали спрашивать, откуда что известно; вот случай, когда вопрос даёт неожиданный ответ.

Два века в Европе сосуществовали «абацисты», считавшие на доске камешками, и «алгористы», считавшие пером на бумаге; на гравюрах начала XVI века их даже изображали соревнующимися.

Победили алгористы, и понятно почему: доска даёт результат, а бумага — ещё и проверяемый ход вычисления. Заметьте, что это ровно тот же довод, по которому в науке ценится не только ответ, но и то, как он получен.

У нас переход случился ещё позже. До Петра I на Руси числа записывали буквами кириллицы — «аз» была единицей, «веди» двойкой, «глаголь» тройкой, — ставя над буквой особый

⁷ Sigler L. E. Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. New York: Springer, 2002.

⁸ Nothaft C. P. E. Medieval Europe's satanic ciphers: on the genesis of a modern myth // British Journal for the History of Mathematics. 2020. Vol. 35, № 2. P. 107–136.

значок, титло, чтобы отличить число от слова. Система эта унаследована от греческой и страдает теми же болезнями: разрядов нет, нуля нет, умножать столбиком нечем. Арабские цифры вводились указами вместе с бородобритием и ассамблеями, и первый русский учебник, по которому учились считать по-новому, — «Арифметика» Магницкого 1703 года⁹ — пришлось писать почти с нуля.

«Цифра» и «ноль» — одно слово

Арабское *сифр* означает «пустой» и было названием знака для пустого разряда. В латыни оно превратилось в *zephirum*, откуда итальянское *zero* и наше «зеро»; а по другой ветви — в *cifra*, откуда «цифра».

То есть слово, которым мы называем любой числовой знак, изначально означало именно ноль — знак, который дольше всех не признавали числом. Следы этого остались в языке: «шифр» из того же корня, а выражение «пустое место» про человека — почти дословный перевод.

Источник. Ifrah G. Histoire universelle des chiffres (указ. соч.). • Menninger K. Number Words and Number Symbols (указ. соч.).

Рихард Курант и Герберт Роббинс

Что такое математика?

«Бог создал натуральные числа, всё прочее — дело рук человека». Этими словами Леопольд Кронекер определил тот прочный фундамент, на котором может быть построено здание математики.

Кронекер имел в виду ровно то, о чём эта книга: всё остальное — дроби, отрицательные числа, корень из минус единицы, бесконечности — люди достраивали сами, каждый раз упираясь в очередное «так не бывает». Натуральные числа — единственное, что досталось нам даром.

Позиция без письменности

Позиционная запись кажется изобретением, которое требует бумаги и развитой математики. Это не так, и лучший тому пример — инки.

Письменности в нашем смысле у них не было. Зато была система учёта, называемая кипу: связка шнуров, на которых завязаны узлы. Узлы сгруппированы по уровням вдоль шнура, и уровень означает разряд — единицы, десятки, сотни, тысячи; тип узла кодирует цифру, пустой промежуток — ноль. То есть настоящая десятичная позиционная система, включая знак пустого разряда, — только не написанная, а завязанная.

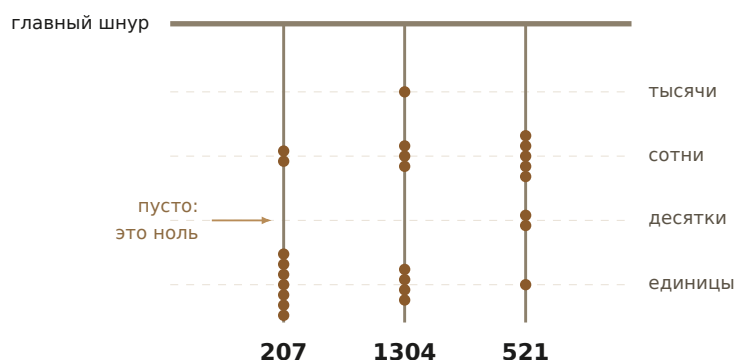


Рис. 1.3. Кипу инков: узлы на шнурах. Место узла вдоль шнура задаёт разряд, пустой промежуток означает ноль. Настоящая десятичная позиционная система — без единой написанной цифры.

⁹ Магницкий Л. Ф. Арифметика, сиречь наука числительная. М., 1703. • Депман И. Я. История арифметики. М.: Учпедгиз, 1959.

Кипу вели специально обученные счетоводы, и по ним держали учёт податей, урожая, населения и складов империи, которая тянулась на четыре тысячи километров. Числа читаются надёжно — это установлено; идёт спор о том, кодировалось ли на кипу что-то, кроме чисел.¹⁰

Мораль здесь ровно та же, что с основанием системы: позиционность — это идея, а не запись. Её можно воплотить чернилами, клинышками на глине, узлами на верёвке или напряжением в транзисторе, и от этого она не изменится ни на йоту.

1.5 Основание могло быть любым

Стоит проговорить вслух то, что из предыдущих разделов следует, но выглядит неправдоподобно: десятка не имеет к числам никакого отношения. Это про руки, а не про арифметику. Правила действий столбиком одинаково хорошо работают при любом основании — при двенадцати, при шестидесяти и при двух.

основание	запись числа 100	что это значит
десять	100	$1 \cdot 100$
два	1100100	$64 + 32 + 4$
три	10201	$81 + 2 \cdot 9 + 1$
двенадцать	84	$8 \cdot 12 + 4$
шестидесят	1 40	$1 \cdot 60 + 40$

число одно и то же — меняется только договорённость о том, чему равен следующий разряд

Рис. 1.4. Одно число в пяти системах. У вавилонян основание шестидесят, и «цифра» там — сама по себе двузначное число: отсюда пробел между разрядами и вечная путаница при чтении табличек.

Двойка — самое маленькое из возможных оснований: цифр всего две, 0 и 1. Придумали её задолго до всякой техники; всерьёз ею занялся Лейбниц, и не из практических соображений. Ноль был для него символом небытия, единица — символом бытия, и то, что любое число на свете записывается только этими двумя знаками, он считал доказательством устройства мира.¹¹

Мартин Гарднер

Математические головоломки и развлечения

Со времён Лейбница и вплоть до недавнего времени двоичную систему считали не более чем занятным курьёзом, лишённым какой бы то ни было практической ценности. Но вот появились вычислительные машины.

Теперь двоичная запись — это вообще всё, что происходит в компьютере, и заодно лучший в мире фокус для показа детям.

¹⁰ Ascher M., Ascher R. Code of the Quipu: A Study in Media, Mathematics, and Culture. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1981. • Urton G. Signs of the Inka Khipu. Austin: University of Texas Press, 2003.

¹¹ Leibniz G. W. Explication de l'arithmétique binaire // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Paris, 1703.

Проверьте себя

Вот пять карточек:

I 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31

II 2 3 6 7 10 11 14 15 18 19 22 23 26 27 30 31

III 4 5 6 7 12 13 14 15 20 21 22 23 28 29 30 31

IV 8 9 10 11 12 13 14 15 24 25 26 27 28 29 30 31

V 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

Попросите кого-нибудь задумать число от 1 до 31 и отдать вам те карточки, на которых оно есть. Больше вы ничего не спрашиваете — и сразу называете задуманное. Как это делается и почему это работает?

А основание не обязано быть больше единицы во всех смыслах, к которым мы привыкли: цифры, например, могут быть отрицательными. Звучит дико — пока не увидишь, зачем это нужно.

Проверьте себя

У вас чашечные весы и четыре гири. Нужно уметь взвесить любой целый груз от 1 до 40 килограммов — по одному разу, ставя гири на любую чашку. Какие четыре гири взять?

1.6 Сосчитать — не то же, что измерить

До сих пор всё, что мы делали, было счётом: овцы, зарубки, разряды. Теперь — вторая половина главы, и она про то, чем измерение отличается от счёта. Разница выглядит мелочью, а на деле это граница между двумя разными видами чисел, и на ней спотыкаются чаще, чем на любой формуле.

Счёт даёт целое число, и оно точное. Овец в загоне ровно семнадцать; не «примерно семнадцать», не «семнадцать плюс-минус одна». Между шестнадцатью и семнадцатью нет ничего — нет овцы с половиной. Такие величины называют дискретными, и с ними натуральных чисел хватает полностью.

Измерение не даёт целого числа никогда. Длина стола — не «полтора метра», а «полтора метра с той точностью, с какой я умею мерить». Возьмёте линейку получше — появятся новые знаки после запятой, и они не кончатся. Такие величины называют непрерывными, и вот для них натуральных чисел уже не хватает: между полутора и одним метром помещается бесконечно много других длин.

Отсюда следуют две вещи, о которых стоит сказать сразу.

Первая: измеренное число всегда идёт с погрешностью, и это не признак плохой работы, а свойство самого действия. Об этом был разговор в прологе, и он повторится ещё много раз.

Вторая: у измеренного числа обязательно есть единица, и без неё оно пустое. «Три» — это не ответ на вопрос «какова длина». Три метра, три фута, три локтя — три разные длины. Сосчитанное число единицы не требует: семнадцать овец — это семнадцать, и никакого «семнадцать чего-то» тут не нужно, овцы уже названы. Именно поэтому в физике за единицами следят как за самими числами — ровно эту проверку мы делали в прологе, ловя неверную формулу маятника.

Числа, которые ничего не измеряют

Есть и третий сорт чисел, который в эту пару не попадает вовсе, — числа-ярлыки. Номер дома, номер маршрута автобуса, номер телефона, номер в паспорте. Они записаны цифрами, но не отвечают ни на вопрос «сколько», ни на вопрос «насколько».

Проверка простая: попробуйте с ними что-нибудь сделать. Сложить дом номер 5 и дом номер 7 — бессмыслица, дома номер 12 из этого не получится. Сказать, что маршрут 34 «вдвое

Ответы

Сложите первые числа возвращённых карточек. Если вам отдали I, III и V — задумано $1 + 4 + 16 = 21$.

Первые числа карточек — это 1, 2, 4, 8, 16, то есть степени двойки. Число попало на карточку тогда и только тогда, когда соответствующая степень входит в его двоичную запись: $21 = 10101_2 = 16 + 4 + 1$. Отдавая карточки, человек попросту диктует вам эту запись — по одному двоичному разряду на карточку, — не подозревая об этом.

Работает фокус потому, что разложение по степеням двойки единственно: никакие две разные стопки карточек не дадут одну и ту же сумму. Ровно это свойство и означают слова «позиционная система с основанием 2».

Пяти карточек хватает на числа до 31, шести — до 63, десяти — до 1023. Каждая следующая карточка удваивает запас: это первая в книге встреча с тем, как быстро растут степени двойки. Она не последняя — в главе 16 из этого вырастет всё, что называется экспоненциальным ростом.

Ответы

1, 3, 9 и 27 килограммов — степени тройки. Сумма их как раз 40.

Секрет в том, что гирю можно класть на ту же чашку, что и груз, — и тогда она работает со знаком минус. Например, $5 \text{ кг} = 9 - 3 - 1$: на одну чашку груз, гири 3 и 1, на другую гирю 9. А $11 = 9 + 3 - 1$, а $40 = 27 + 9 + 3 + 1$.

Это троичная система, в которой цифры не 0, 1, 2, а -1, 0, +1: каждая гиря либо лежит с грузом, либо против него, либо не участвует. Три состояния — три цифры. Ровно так же, как в фокусе с карточками каждая карточка отвечала за один двоичный разряд, здесь каждая гиря отвечает за один троичный.

Задачу поставил Клод Баше в 1612 году, и она до сих пор лучший способ почувствовать, что основание системы — это инструмент, который выбирают под задачу. С двоичными гирями (1, 2, 4, 8, 16, 32) вы тоже взвесите всё до 63, но гирь понадобится шесть, а не четыре, — потому что вы не пользуетесь второй чашкой.

Источник. Bachet C. G. Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Lyon, 1612.

больше» маршрута 17, — тоже. Единственное, что с такими числами законно делать, — сравнивать на равенство: этот номер тот же самый или другой.

Иногда порядок всё-таки есть, а арифметики всё равно нет. Место в забеге: первый пришёл раньше второго, второй раньше третьего — порядок настоящий. Но разница между первым и вторым может быть в сотую долю секунды, а между вторым и третьим — в минуту, и «второй плюс третий» по-прежнему ничего не значит.

Отдельная и вечная беда порядковых чисел — с какого места начинать. Ноля в порядке нет: первый, второй, третий, — а «нулевого» не бывает, потому что считать начинают с того, что уже есть. Отсюда путаница, которая не кончается никогда.

В России и Америке этаж, на который вы входите с улицы, — первый; в большей части Европы он нулевой, а первый — следующий. Веков это касается ещё обиднее: нулевого года нет, за первым годом до нашей эры сразу идёт первый год нашей, поэтому двадцать первый век начался не в 2000-м, а в 2001-м, — и весь мир отпраздновал на год раньше, потому что красивое число оказалось убедительнее арифметики. Программисты, у которых нумерация элементов начинается с нуля, а не с единицы, воюют с ошибкой «на единицу» столько, сколько существует программирование.

Ничего фундаментального в этом нет: где начинать отсчёт — вопрос соглашения, ровно как основание системы счисления и как длина метра. Но соглашения надо знать, потому что природа за них не отвечает — и ошибку на единицу не исправит.

Различать эти сорта — не педантизм. Половина глупостей, которые делают с данными, состоит в том, что над числами-ярлыками производят арифметику: усредняют номера поликлиник, складывают коды регионов, считают «средний балл» там, где балл — это место в порядке, а не количество. К этому разговору мы вернёмся всерьёз в главе 31, когда речь пойдёт о статистике.

Проверьте себя

Возьмите литр воды и литр чистого спирта и слейте вместе. Сколько получится жидкости?

Ответ «два литра» неверен. Сколько на самом деле — и, главное, почему?

Проверьте себя

И ещё одно «один плюс один». На сухом стекле лежит капля воды; вы аккуратно подводите к ней вторую такую же.

Сколько получится капель?

Когда природа сама выбирает целые числа

Кажется, что деление на счётное и непрерывное установлено раз и навсегда: предметы считают, вещество меряют. В XX веке выяснилось, что граница проходит не там, где думали, — и в самых неожиданных местах природа считает сама.

Электрический заряд не бывает каким угодно. Он всегда кратен одной и той же порции — заряду электрона; половины заряда не существует.¹² Заряд, который выглядит непрерывной величиной (можно же зарядить тело сильнее или слабее), на самом деле счётный: вопрос «какой заряд» на глубоком уровне означает «сколько электронов».

То же с энергией электрона в атоме: она принимает не любые значения, а только значения из определённого списка. Атом не умеет «немного» перейти между уровнями — он либо перепрыгивает целиком, либо нет. Отсюда, между прочим, берутся спектральные линии, по которым в прологе читали состав звёзд.

Именно это — буквальный смысл слова «квант»: порция, которую нельзя разделить. Вся часть VI книги будет про то, как выяснилось, что мир на маленьких масштабах устроен скорее как зарубки на кости, чем как верёвка, — и что величины, которые мы привыкли измерять, приходится считать.

1.7 Откуда берутся единицы

Раз без единицы измеренное число пусто, стоит спросить, откуда единицы берутся. Ответ обескураживающий: их назначают.

Первые единицы брали с тела — локоть, пядь, ладонь, фут, шаг. Это удобно (мерка всегда с собой) и никуда не годится (мерка у каждого своя). Дальше единицу привязывали к телу начальника: английский ярд, по преданию, — расстояние от носа короля Генриха I до кончика его вытянутого пальца. Пока торгуют в пределах одной деревни, это работает. Как только начинается наука, перестаёт: два человека не могут сравнить результаты, если у них разные локти.

В 1791 году французы решили эту проблему радикально: привязать единицу не к человеку, а к планете. Метр определили как одну десятиmillionную часть расстояния от Северного полюса до экватора, отмеренного по меридиану, проходящему через Париж.

Идея прекрасная, но её нужно было исполнить — то есть измерить этот меридиан. За дело взялись астрономы Жан-Батист Деламбр и Пьер Мешен: первый шёл с севера от Дюнкерка, второй с юга от Барселоны, оба вели триангуляцию — цепочку треугольников от вершины к

12 Millikan R. A. On the elementary electrical charge and the Avogadro constant // Physical Review. 1913. Vol. 2, № 2.

Ответы

Получится около 1,93 литра. Смесь равных объёмов воды и спирта даёт примерно на три с половиной процента меньше, чем сумма, — эффект известен как контракция и легко наблюдается дома в мерном стакане.

Причина в том, что молекулы воды заметно мельче молекул спирта и частично забиваются в пустоты между ними, — примерно как ведро песка, всыпанное в ведро щебня, не даёт двух вёдер смеси. Добавляет и то, что вода и спирт притягиваются друг к другу сильнее, чем каждая жидкость сама к себе.

Но интереснее общий вывод. Объём — измеряемая величина, и складывать объёмы никто нам не обещал: аддитивность — это физическое свойство, которое либо есть, либо нет, и проверять его надо опытом. Массы складываются всегда (два литра дадут ровно сумму масс). Объёмы — нет. Температуры — тем более нет: смешав литр воды в 20° и литр в 40°, вы получите 30°, а не 60.

Арифметика тут ни при чём и не ошибается: $1 + 1 = 2$ остаётся верным. Неверным было предположение, что складывать нужно именно объёмы.

Источник. CRC Handbook of Chemistry and Physics. 100th ed. Boca Raton: CRC Press, 2019. (Плотности водно-спиртовых растворов.)

Ответы

Одна. Капли сливаются — поверхностное натяжение стягивает жидкость в единый объём, и никакой границы между «первой» и «второй» не остаётся.

Шутка старая, но за ней стоит содержательная вещь: чтобы предметы можно было считать, они должны быть *отделимы* друг от друга. Овцы отделимы, капли — нет; поэтому овец считают, а воду измеряют. Вопрос «сколько здесь воды» осмыслен только в форме «сколько литров» или «сколько граммов», то есть с единицей.

Отсюда, кстати, видно, почему счётное и непрерывное — не свойство чисел, а свойство того, о чём говорят. Одна и та же вода: капли — считаем, объём — измеряем.

вершине, — и оба занимались этим семь лет, в разгар революции и войны, регулярно объясняя вооружённым людям, зачем они лезут на колокольню с непонятным прибором.¹³



Рис. 1.5. Метр 1791 года — одна десятиmillionная четверти меридиана. Делабур и Мешен прошли триангуляцией участок от Дюнкерка до Барселоны, остальное досчитали; отсюда и берётся та самая ошибка в 0,2 миллиметра.

¹³ Alder K. The Measure of All Things: The Seven-Year Odyssey That Transformed the World. New York: Free Press, 2002.

Меридиан они измерили. С небольшой ошибкой — Мешен получил в Барселоне слегка расходящиеся результаты для широты, промучился с этим до конца жизни и, как считают историки, отчасти из-за этого умер, — и в итоге метр вышел чуть короче задуманного.

Проверьте себя

Меридиональная окружность Земли (то есть по большому кругу через полюса) равна примерно 40 008 километрам.

Задуманный метр — это одна десятиллионная четверти этой окружности. Насколько получившийся у французов метр отличается от задуманного и в какую сторону?

Дальше история единиц становится историей всё более занудной точности. Отмеренный метр отлили в платино-иридиевом бруске, положили в подвал Международного бюро мер и весов в Севре под Парижем, сделали копии и разослали по странам. То же сделали с килограммом.

И тут выяснилась неприятность. Эталон — физический предмет; он живёт, царапается, собирает грязь, теряет и набирает атомы. Килограмм в Севре за сто лет разошёлся со своими же копиями примерно на пятьдесят микрограммов¹⁴ — и никто не мог сказать, кто из них изменился, потому что сравнивать было не с чем: по определению эталон весил килограмм всегда, что бы с ним ни происходило.

Выход нашли только в конце XX века, и он изящен: привязать единицы не к предметам, а к константам природы, которые одинаковы всюду и всегда.

Как определены единицы сегодня

Секунда (с 1967 года) — это 9 192 631 770 периодов излучения, которое даёт переход между двумя определёнными уровнями атома цезия-133. Атом цезия один и тот же на Земле и в другой галактике.

Метр (с 1983 года) — расстояние, которое свет проходит в вакууме за $1/299\,792\,458$ долю секунды. Заметьте, что теперь скорость света не измеряют: она стала точным числом по определению, а измеряют — расстояния.

Килограмм (с 2019 года) — определён через постоянную Планка, которой присвоено точное значение $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Севрская гиря с этого дня — музейный экспонат.

Логика во всех трёх случаях одна: взять величину, которую физика считает неизменной, объявить её значение точным — и определять через неё единицу.

Источник. Bureau international des poids et mesures. The International System of Units (SI). 9th ed. Sèvres, 2019.

Базовых единиц в системе СИ семь: секунда, метр, килограмм, ампер, кельвин, моль и кандела. Число это тоже не свято. Кандела — сила света — вообще определена с оглядкой на чувствительность человеческого глаза, то есть на устройство нашей сетчатки; будь у нас другие глаза, была бы другая единица. А физики-теоретики, которым бытовые размеры не нужны, работают в системах, где скорость света и постоянная Планка попросту равны единице, — и тогда время и расстояние измеряются одним и тем же, потому что, как мы увидим в части VII, это и есть одно и то же.

Стоит задержаться на том, что здесь произошло, потому что это красиво. Раньше единицу хранили в подвале, а константы измеряли. Теперь константы объявлены точными, а измеряют всё остальное. Ни одна из этих величин от переопределения не изменилась — изменилось только, что считать данным, а что искомым. Ровно этим приёмом — «поменять местами, что дано, а что ищем» — мы будем пользоваться дальше постоянно.

И заметьте, чего в этой истории нет. Природа нигде не сообщила, что метр должен быть именно такой длины. Она сообщила только, что скорость света всюду одна и та же; всё

¹⁴ Girard G. The third periodic verification of national prototypes of the kilogram (1988–1992) // Metrologia. 1994. Vol. 31, № 4.

Ответы

Четверть меридиана — это $40\,008/4 = 10\,002$ км, то есть $10\,002\,000$ м. Разделим на десять миллионов: «правильный» метр должен был бы равняться $1,0002$ нынешнего метра.

Значит, наш метр короче задуманного на $0,0002$ м — на $0,2$ миллиметра, или на две сотых процента.

Ошибка ничтожная по бытовым меркам и огромная по научным: на расстоянии от Москвы до Петербурга она даёт лишних сто с лишним метров. И заметьте, что произошло дальше — менять определение не стали. Метр остался таким, каким его отмерили Деламбр и Мешен, а связь с меридианом тихо отбросили. Единица — это договорённость, и удобство важнее красоты происхождения.

остальное — наш выбор, продиктованный тем, что от старого метра было жалко отказываться. Числа, которыми мы измеряем мир, наполовину состоят из мира и наполовину из наших договорённостей, и полезно всегда помнить, где проходит шов.

Единицы, о которых так и не договорились

Метрическая система победила почти везде, но «почти» здесь существенное, и живут рядом с ней вещи довольно причудливые.

Высоту полёта самолёты в большей части мира отсчитывают в футах, а расстояние — в морских милях. Причина не в упрямстве: морская миля — это одна угловая минута дуги меридиана, то есть единица, прямо связанная с географическими координатами. Штурману, работающему с картой, в ней считать естественно: одна минута широты — одна миля, и никаких переводных коэффициентов. С 1929 года её договорились считать ровно равной 1852 метрам¹⁵ — и обратите внимание, что это опять та же самая идея, что у Деламбра с Мешеном: единицу привязали к размеру Земли.

Астрономы меряют расстояния в световых годах (столько проходит свет за год — около $9,5 \cdot 10^{15}$ метров) и в парсеках, а физики, изучающие частицы, — в электронвольтах, причём в электронвольтах у них измеряется и энергия, и масса, и даже температура. Каждая такая единица возникла потому, что в своей области она даёт числа удобного размера: расстояние до ближайшей звезды — «четыре с небольшим световых года», а не «сорок с лишним квадриллионов метров».

Здесь стоит запомнить простое правило. Единицу выбирают так, чтобы интересующие вас числа получались близкими к единице. Это не эстетика — это защита от ошибок: с числом $4,2$ человек не ошибается, а в $4,0 \cdot 10^{16}$ легко потерять или добавить порядок. Ровно поэтому в системе СИ есть приставки, а в каждой науке — своя любимая единица.

Проверьте себя

Среди физиков ходит мнемоника: в году примерно $\pi \cdot 10^7$ секунд.

Проверьте, насколько это верно, — и решите, годится ли такая точность для оценок по порядку величины.

1.8 Очень большие числа

Осталось разобраться с ощущением, что где-то числа кончаются. Это ощущение древнее и стойкое: «песчинок не сосчитать», «звёзд без числа».

Архимед решил показать, что это неправда, и написал сочинение, которое так и называется — «Псаммит», то есть «Исчисление песчинок». Он поставил себе задачу: назвать число песчинок, которое заполнило бы всю Вселенную. Причём Вселенную взял самую большую из обсуждавшихся тогда — гелиоцентрическую, по Аристарху Самосскому.

¹⁵ BIPM. The International System of Units (SI). 9th ed., 2019.

Ответы

В году $365,25 \times 24 \times 3600 = 31\,557\,600$ секунд, то есть $3,1558 \cdot 10^7$. А $\pi \cdot 10^7 = 3,1416 \cdot 10^7$.

Расхождение — меньше половины процента. Для прикидок это не просто годится, это роскошь: обычно в таких оценках мы согласны и на множитель два.

Совпадение чистая случайность — ни секунда, ни год не имеют отношения к числу π ; секунда родилась из деления суток на 24, 60 и 60, а год — из движения Земли. Просто два произвольных выбора сложились так, что результат оказался рядом с известной константой. Пользоваться этим приятно и совершенно законно: считать в уме $\pi \cdot 10^7$ проще, чем 31557600.

Попробуйте сами: сколько секунд вы прожили? Тридцать лет — это $30 \times 3,16 \cdot 10^7 \approx 10^9$. Миллиард секунд — и вот вам ещё одно число, которое стоит однажды осознать.

Греческая система счисления кончалась на мириаде — десяти тысячах, — и мириаде мириад, то есть на ста миллионах. Дальше слов не было. Архимед построил свою систему разрядов, которая уходила несравненно дальше, посчитал — и получил, что песчинок понадобится меньше, чем 10^{63} .¹⁶

Существенно здесь не само число, а сделанный вывод: нет такого количества, для которого не хватило бы чисел. Сколько бы вы ни насчитали, к результату всегда можно прибавить единицу. Ряд натуральных чисел не кончается — и это, между прочим, тоже утверждение, требующее доказательства, а не наблюдения.

Тьма, легион и колода

Греческой мириаде — десяти тысячам — в древнерусском счёте соответствовала «тьма». Выражение «тьма народу» изначально означало не темноту, а количество: десять тысяч. Дальше шло «великое число»: легион — тьма тем, леодр — легион легионов, ворон — леодр леодров, и наконец колода. По одному из вариантов счёта колода доходила до 10^{49} , и о ней прямо писали, что «более сего несть человеческому уму разумевати». Ровно та же граница, в которую упёрся Архимед, — и ровно тот же способ её перейти: придумать новый разряд.

Источник. Депман И. Я. История арифметики (указ. соч.). • Ifrah G. Histoire universelle des chiffres (указ. соч.).

Проверьте себя

Прикиньте в уме, сколько песчинок поместится в кубическом метре, если диаметр песчинки около полумиллиметра. Сравните результат с числом Архимеда.

Записывать такие числа словами невозможно, и физика давно пользуется степенями десяти. Это не сокращение ради лени, а способ видеть суть: 10^{63} и 10^{27} различаются на тридцать шесть порядков, и это видно с одного взгляда, а «секстиллион» и «октодециллион» не говорят ничего никому.

Отсюда же приставки, которые все знают и мало кто чувствует: кило — тысяча, мега — миллион, гига — миллиард, тера — триллион; в другую сторону милли, микро, нано, пико. Между нанометром и метром — девять порядков, ровно столько же, сколько между метром и расстоянием, которое свет проходит за три секунды. Привычка переводить приставку в степень десяти и сравнивать степени — ещё один дешёвый способ не сказать глупость.

16 Архимед. Псаммит (Исчисление песчинок) // Архимед. Сочинения. М.: Физматгиз, 1962.

Ответы

В одном метре укладывается $1/0,0005 = 2000$ песчинок в ряд. В кубе, значит, около $2000^3 = 8 \cdot 10^9$ — восемь миллиардов, порядок 10^{10} .

До архимедовых 10^{63} отсюда — ещё пятьдесят три порядка. Чтобы почувствовать пропасть: всех песчинок на всех пляжах Земли оценивают величиной порядка 10^{20} , число атомов в человеческом теле — около 10^{27} , а звёзд в наблюдаемой Вселенной — порядка 10^{22} . Архимед посчитал нечто, что больше всего этого вместе взятого, — и обошёлся без единого прибора, одной только системой обозначений.

Заметьте попутно, что вы сейчас делали: ту самую оценку по порядку величины из пролога. Настоящая упаковка песчинок неплотная, форма их неправильная, ответ может отличаться вдвое — и это совершенно неважно, потому что вопрос был про порядок, а не про число.

Гугол и гуголплекс

В 1938 году американский математик Эдвард Каснер спросил девятилетнего племянника, как бы тот назвал единицу со ста нулями. Мальчик ответил: «гугол». Так это слово и осталось в математике — а шестьдесят лет спустя с опечаткой перекочевало в название поисковой системы.

Гугол — 10^{100} — уже больше числа атомов в наблюдаемой Вселенной (порядка 10^{80}). А гуголплекс — это единица с гуголом нулей; записать его десятичными цифрами невозможно в принципе: во Вселенной не хватит места на нули, даже если писать по одному на атом.

Источник. Kasner E., Newman J. *Mathematics and the Imagination*. New York: Simon and Schuster, 1940. (Слово «гугол».)



Посмотреть. Канал 3Blue1Brown — лучшая математическая анимация из существующих.

К этой главе ближе всего его ролики о системах счисления и о том, как выглядит счёт в разных основаниях. Дальше по книге пригодятся серии «Essence of calculus» и «Essence of linear algebra».

<https://www.youtube.com/@3blue1brown>

1.9 А что такое, собственно, число

Один вопрос мы всю главу обходили. Мы выяснили, как числа появились, как их называли, записывали и до каких величин доводили. Но что такое число — так и не сказали.

Долгое время этого и не требовалось: натуральные числа казались настолько очевидными, что определять их было бы странно, вроде как определять слово «вещь». Кронекер, которого мы уже цитировали, именно это и имел в виду: они даны, всё остальное строим сами.

К концу XIX века выяснилось, что «даны» — слишком расплывчато для математики, которая как раз тогда взялась перепроверять собственные основания. Джузеппе Пеано в 1889 году¹⁷ предложил определить натуральные числа не через то, что они такое, а через то, как они себя ведут, — пятью правилами:

¹⁷ Peano G. *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Torino: Bocca, 1889.

- а) Единица — натуральное число.
- б) У каждого натурального числа есть следующее за ним, и оно тоже натуральное.
- в) Единица не следует ни за каким числом (она первая).
- г) Если у двух чисел одно и то же следующее — это одно и то же число.
- д) Если некоторое свойство есть у единицы и, будучи у числа, переходит к следующему, — то оно есть у всех натуральных чисел.

Ничего лишнего, и ничего про то, «что такое единица на самом деле». Числа определены как цепочка: есть начало, у каждого звена есть следующее, звенья не склеиваются и не зацикливаются. Пятое правило — это математическая индукция, тот самый принцип домино: если падает первая костяшка и каждая роняет следующую, упадут все. Мы будем пользоваться им постоянно.

Стоит оценить, как далеко это от волчьей кости. Тридцать тысяч лет от зарубки до понимания, что число — не предмет и не свойство предметов, а место в цепочке. И, что характернее всего для этой книги, история на этом не кончилась хорошо: именно арифметика, самое простое и очевидное, что есть в математике, оказалась тем местом, где Гёдель через полвека нашёл принципиальную дыру. Об этом — глава 52, последняя из невозможностей.

1.10 Что мы на самом деле сделали

Стоит подвести черту, потому что за простыми вещами тут спрятана вся конструкция.

Мы начали с зарубок — то есть с того, что каждой вещи ставится в соответствие один знак. Потом заметили, что совокупности можно сравнивать, вообще не считая, — через взаимно-однозначное соответствие. Из этого сравнения родилось само понятие числа: то общее, что есть у всех совокупностей одинакового размера. Потом мы научились называть числа группами — и получили основание системы. Потом придумали позицию и ноль — и получили возможность считать на бумаге. Потом убедились, что числа не кончаются.

И, наконец, обнаружили, что всё это относится к счёту, а измерение устроено иначе: у него есть единица, есть погрешность, и целыми числами оно не обходится.

Всё, что мы пока получили, — это натуральные числа: 1, 2, 3, и так далее без конца. Ими можно сосчитать что угодно.

Но сосчитать — не то же самое, что измерить, и теперь понятно, почему. Стоит вам взять верёвку и попытаться узнать, сколько в ней локтей, как выяснится, что целых локтей в неё укладывается три, а дальше остаётся кусок. Для этого куска натуральных чисел не хватает.

Так появятся дроби — и следующая глава про них. А ещё через три главы окажется, что даже дробей хватает не на всё: найдётся отрезок, который не измеряется вообще никакой дробью, — и с него начнётся первая из невозможностей, вынесенных в название книги.

Что читать дальше

Этот список устроен не так, как ссылки внизу страниц. Там — подтверждения: откуда взято конкретное число, дата или обстоятельство, чтобы читатель мог проверить, если не поверил. Здесь — книги, которые стоит прочесть целиком, и короткое пояснение, зачем.

Почти каждая из них написана лучше, чем пересказ в соответствующей главе: у меня было полторы страницы, у автора — триста. Если какой-то сюжет зацепил, правильный следующий шаг — не искать в интернете, а взять отсюда книгу.

Про язык сказано честно. Где есть русское издание, книга названа по-русски; где его нет — это указано в конце пояснения, чтобы никто не искал впустую.

Физика

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1–10

Главный учебник XX века и до сих пор непревзойдённый. Читать не подряд, а по темам: почти в каждой лекции есть место, после которого закон кажется единственно возможным.

Фейнман Р. Характер физического закона

Шесть лекций не про какой-то конкретный закон, а про то, как законы вообще устроены и почему математика в них работает. Если брать у Фейнмана одну книгу — эту.

Фейнман Р. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!

Не про физику, а про то, как устроен физик: любопытство, недоверие к авторитету и привычка всё проверять руками. Оттуда же речь «Наука самолётопоклонников».

Азимов А. Путеводитель по науке

Вся естественная наука одним связным рассказом, с историей вопроса и человеческими обстоятельствами. Лучшее чтение для того, кто хочет увидеть картину целиком.

Левин У., Гольдштейн У. Глазами физика

Тот самый Левин, который проверял закон сохранения энергии собственными зубами. Физика как зрелище и как измерение; хорошо читается вместе с его видеокурсом.

Перельман Я. И. Занимательная физика; Занимательная механика

Столетние книжки, которые не устарели, потому что устроены хитро: почти каждая задача подобрана так, чтобы интуиция дала уверенный и неправильный ответ.

Кун К. Ф. Физика: начальный курс. Самоучитель

Скучноватый снаружи и очень полезный внутри самоучитель с расчётными задачами. Большинство задач «на посчитать» в этой книге — оттуда.

Хокинг С. Кратчайшая история времени

Горизонт: пространство, время, чёрные дыры, начало Вселенной — кратко и без формул.

Краусс Л. Страх физики. Сферический конь в вакууме

Про то, как физик на самом деле думает: приближения, оценки на салфетке и умение отбросить лишнее.

Математика

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?

Лучшая карта предмета целиком: от чисел до топологии, честно и без разжижения. Требуется внимания, но окупается больше любой другой книги из списка.

Строгац С. Удовольствие от x

Образец того, как объяснить одну идею за раз и вовремя остановиться. Хорошо читать параллельно с этой книгой — многие сюжеты совпадают.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения; Математические досуги; От мозаик Пенроуза к надёжным шифрам

Головоломки с полными разборами, полвека колонки в *Scientific American*. В каждой главе этой книги стоит одна задача Гарднера — если понравились, здесь их сотни.

Азимов А. Числа: от арифметики до высшей математики

Откуда взялись числа и почему они выглядят именно так. Прямое продолжение первой главы.

Беллос А. Красота в квадрате

Где математика встречается вам в обычной жизни и почему вы этого не замечали.

Элленберг Дж. Как не ошибаться. Сила математического мышления

Про то, как на математике ловят: статистика, выборки, ложные выводы из верных чисел. Пригодится к части V.

Млодинов Л. (Не)совершенная случайность

Проводник по случайности: почему интуиция в вероятности почти всегда врёт.

Хофштадтер Д. Гёдель, Эшер, Бах

Про самоссылку, формальные системы и неполноту — к части VIII. Читать медленно и не подряд; книга сама устроена как то, о чём рассказывает.

Бобров С. Волшебный двурог

Советская повесть-путешествие по математике: школьник, волшебный спутник, приключения и предмет где-то между ними. Написана для подростков, и форма этого не скрывает — взрослому она даётся тяжело, даже когда содержание нравится. Берите, если такая подача вам близка или если книга нужна ребёнку; если нет — те же сюжеты изложены у Куранта и Роббинса, только без сказки.

Савватеев А. В. Математика для гуманитариев: живые лекции; Сборник задач к курсу «100 уроков математики»

Когда захочется трудного. Сборник задач — настоящая лестница; ответов в нём нет, и это честно: их приходится добывать.

Savov I. No Bullshit Guide to Mathematics. No Bullshit Guide, 2020

Плотный конспект всей школьной математики и начал анализа для взрослого, который возвращается к предмету: множества, функции, алгебра, тригонометрия, векторы, производная, интеграл — с упражнениями и ответами к ним. Ровно то, чего эта книга не делает: здесь объясняют, откуда что взялось, а там дают набить руку. По-английски.

Savov I. No Bullshit Guide to Linear Algebra. Draft, 2016

То же самое, но целиком про линейную алгебру: векторы, матрицы, собственные значения, приложения. Естественное продолжение главы 39, если захочется не только понять, но и уметь считать. По-английски.

Откуда что взялось: история понятий

Ifrah G. Histoire universelle des chiffres

Как человечество тридцать тысяч лет изобретало цифры — от зарубок на кости до нуля. Главный источник исторической части первой главы. По-французски; русского издания нет, но есть английский перевод — *The Universal History of Numbers*.

Menninger K. Number Words and Number Symbols

То же самое со стороны языка: откуда взялись сами слова для чисел и следы старых систем счёта в современных языках. По-английски (перевод с немецкого), русского издания нет.

Депман И. Я. История арифметики

Русская классика жанра; отдельно ценна главами про славянский счёт и «тѣмъ с легиономъ».

Boyer C. B., Merzbach U. C. A History of Mathematics

Справочник, к которому идут за датой, именем и порядком событий. По-английски; по-русски похожую службу сослужит Стройк Д. «Краткий очерк истории математики».

Нейгебауэр О. Точные науки в древности. М.: Наука, 1968

Вавилон и Египет: откуда взялись шестьдесят минут в часе и триста шестьдесят градусов в круге. Перевод старый, но книга не устарела.

Dehaene S. The Number Sense

Чувство числа: что умеют младенцы, вороны и шимпанзе и где кончается «вижу, что их три» и начинается счёт. По-английски.

Alder K. The Measure of All Things

Семь лет, два астронома, революция и война — история о том, как измеряли меридиан, чтобы получить метр, и что при этом пошло не так. По-английски.

Ascher M., Ascher R. Code of the Quipu

Узелковая арифметика инков: позиционная система без письменности. По-английски.

Орд-Хьюм А. Вечное движение. История одной навязчивой идеи

Шестьсот лет попыток построить вечный двигатель. Полезнее, чем кажется: почти каждая схема — поучительный образец честного подсчёта половины эффекта.

Huizenga J. R. Cold Fusion: The Scientific Fiasco of the Century

Разбор истории холодного синтеза изнутри — как наука ошибается публично и как выправляется. По-английски.

Conway J. H., Guy R. K. The Book of Numbers

Числа всех сортов и происхождений, с рисунками и без занудства. По-английски.

Kasner E., Newman J. Mathematics and the Imagination

Книга 1940 года, подарившая миру слово «гугол», и до сих пор прекрасное чтение. По-английски.

Спор о методе

Поппер К. Логика научного исследования

Откуда взялось требование опровержимости и почему оно оказалось таким удобным и таким спорным.

Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // УФН. 1968. Т. 94, вып. 3

Статья на десять страниц, ставящая главный вопрос этой книги: почему математика вообще работает в физике. Ответа в ней нет — и это честно. Русский перевод есть в открытом архиве «Успехов физических наук».

Смолин Л. Неприятности с физикой • Woit P. Not Even Wrong • Dawid R. String Theory and the Scientific Method

Три книги о том, считать ли наукой теорию, которую нечем проверить. Первые две — против, третья — за; читать стоит вместе, порознь каждая слишком убедительна. Смолин переведён на русский, две другие — нет.

Первоисточники

Евклид. Начала

Доказательство о бесконечности простых чисел — предложение 20 книги IX. Двадцать три века, и ни одной трещины.

Архимед. Псаммит (Исчисление песчинок)

Первый в истории текст, где кто-то строит систему обозначений специально для того, чтобы дотянуться до очень большого числа.

Галилей Г. Беседы и математические доказательства

Диалог, в котором рушится Аристотель. Видно, как человек думает, — со всеми отступлениями и спорами с воображаемым оппонентом.

Магницкий Л. Ф. Арифметика, сиречь наука числительная (1703)

Первый русский учебник новой арифметики; по нему училась вся петровская Россия.

Leibniz G. W. Explication de l'arithmétique binaire (1703) • Bachet C. G. Problèmes plaisants (1612) • Peano G. Arithmetices principia (1889)

Три коротких текста, прямо использованных в первой главе: двоичная система, задача о гирях и определение натурального числа.

Видео

Уолтер Левин. Курс 8.01 «Классическая механика», MIT

Полные записи лекций на официальном канале автора. Смотреть ради демонстраций: то, что в книге приходится описывать словами, там происходит на глазах.

3Blue1Brown (Грант Сандерсон)

Лучшая математическая анимация из существующих. Серии «Essence of calculus» и «Essence of linear algebra» — к частям II и VI.

И последнее. Книгу пишут на глазах у читателя, и лучшее, что с ней может случиться, — чтобы ошибку поймали раньше, чем она затвердеет.



Обсудить. Чат книги в телеграме: **@gfazzzchat**. Пишите про ошибки и опечатки, про места, где объяснение не сработало, и про задачи, ответ к которым не сошёлся: последнее особенно ценно — значит, глава недоговорила.

<https://t.me/gfazzzchat>